
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01214691 6

PRINCIPES

DE LA THÉORIE DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
23089 Quai des Grands-Augustins, 55.



PRINCIPES

DE LA THÉORIE DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES

ET

APPLICATIONS,

PAR

P. APPELL,
MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

E. LACOUR,
MAITRE DE CONFÉRENCES
A L'UNIVERSITÉ DE NANCY.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1897

PRÉFACE.

Les Traités sur les fonctions elliptiques imprimés en France sont des Traités complets destinés spécialement aux mathématiciens : la plupart d'entre eux prennent comme point de départ les théorèmes généraux de la théorie des fonctions ; dans tous, l'étude des fonctions elliptiques est envisagée au point de vue le plus général et poussée le plus loin possible (multiplication, division, transformation, équations modulaires, multiplication complexe).

Nous nous sommes proposé de faire un *Traité des Fonctions elliptiques*, d'un caractère élémentaire, en un seul Volume, contenant les principes essentiels de la Théorie et montrant, par des applications simples, combien ces fonctions sont utiles pour la résolution de certaines questions de Géométrie, de Mécanique et de Physique mathématique.

La Théorie des fonctions elliptiques est comme une Trigonométrie d'un ordre plus élevé ; nous nous sommes limités dans notre exposé aux principes fondamentaux ; ces principes étant bien compris, les parties plus profondes de la Théorie deviennent facilement accessibles.

Pour réduire au minimum les emprunts à la Théorie des fonctions, nous prenons comme point de départ la notion du développement d'une fonction uniforme par la formule de Taylor ; nous ne nous servons pas de la théorie de Cauchy sur les intégrales prises entre des limites imaginaires. Nous donnons, dans une courte introduction, la définition des

quelques termes tirés de la Théorie des fonctions, qui sont employés dans l'Ouvrage.

La Théorie des fonctions rationnelles et des fonctions trigonométriques est d'abord exposée par les méthodes mêmes qui sont employées ensuite pour les fonctions elliptiques. Le lecteur voit ainsi, sur des fonctions simples avec lesquelles il est familiarisé, l'enchaînement des raisonnements et des théorèmes qu'il rencontrera ensuite pour les fonctions elliptiques.

Les formules principales de la Théorie des fonctions rationnelles d'une variable x se réduisent à deux formules types : une première formule mettant en évidence les valeurs de x, qui rendent la fonction rationnelle $f(x)$ nulle ou infinie

$$f(x) = A\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_p)};$$

puis une deuxième formule, dite de *décomposition en éléments simples,* mettant en évidence les points où la fonction devient infinie, et la façon dont elle y devient infinie

$$f(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_m x^m + \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{L}{x-l};$$

l'élément simple $\frac{1}{x-a}$ est la dérivée de $\operatorname{Log}(x-a)$.

Les formules principales de la Théorie des fonctions trigonométriques peuvent, de même, se ramener à deux types analogues : une première formule mettant en évidence les points où la fonction devient nulle ou infinie

$$f(x) = A e^{m x i}\frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\ldots\sin(x-a_n)}{\sin(x-b_1)\sin(x-b_2)\ldots\sin(x-b_p)},$$

et une deuxième formule, appelée *formule de décomposition en éléments simples,* mettant en évidence la façon dont la

fonction devient infinie

$$\begin{aligned} f(x) = C_0 + C_1 e^{2xi} + C_2 e^{4xi} + \ldots + C_m e^{2mxi} \\ + C'_1 e^{-2xi} \qquad + \ldots + C'_n e^{-2nxi} \\ + A \cot(x-a) + B \cot(x-b) + \ldots + L \cot(x-l). \end{aligned}$$

On peut remarquer encore que l'élément simple

$$\cot(x-a)$$

est la dérivée de

$$\operatorname{Log} \sin(x-a).$$

De même, dans la Théorie des fonctions elliptiques, il existe deux formules fondamentales : 1° une formule de décomposition en facteurs

$$f(x) = A e^{cx} \frac{H(x-a_1)\ldots H(x-a_n)}{H(x-b_1)\ldots H(x-b_n)}$$

mettant en évidence les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$, où la fonction s'annule, et les points $b_1, b_2, \ldots, b_n$ où elle devient infinie ; 2° une formule de décomposition en éléments simples, due à M. Hermite

$$f(x) = C_0 + AZ(x-a) + \ldots + LZ(x-l)$$

où l'élément simple $Z(x-a)$ est égal à

$$\frac{d \operatorname{Log} H(x-a)}{dx}.$$

La plupart des calculs sur les fonctions elliptiques sont fondés sur l'emploi de l'une ou de l'autre de ces deux formules : ces calculs se ramènent donc à des règles simples dont il est fait de nombreuses applications.

La Théorie des fonctions elliptiques se complique de la question des notations qui varient d'un Traité à l'autre. Tout d'abord, nous nous sommes interdit rigoureusement d'employer aucune notation nouvelle. Nous avons exposé simul-

tanément deux systèmes de notations qui doivent subsister définitivement : celui de Jacobi, constamment suivi par M. Hermite, dans toutes ses recherches, et celui de M. Weierstrass. Le passage de l'un de ces systèmes à l'autre est aisé : néanmoins, il importe de les conserver tous les deux ; car, suivant les cas, les applications sont plus faciles dans l'un des systèmes que dans l'autre. En outre, après avoir lu un Traité élémentaire, le lecteur doit connaître les deux systèmes, afin de pouvoir lire ensuite les Livres ou les Mémoires écrits dans chacun d'eux.

Pour préparer les applications, nous avons étudié avec soin les cas particuliers où les valeurs des fonctions elliptiques sont réelles, les seuls qui puissent se présenter en Mécanique et en Physique.

Chaque Théorie est suivie immédiatement de quelques applications ; ainsi l'étude de la fonction $\wp$ de M. Weierstrass, quand l'une des périodes est réelle et l'autre purement imaginaire, est suivie d'applications à la cubique plane, à la lemniscate, au pendule sphérique, au mouvement d'un corps pesant de révolution suspendu par un point de son axe ; l'étude des fonctions de Jacobi, pour le cas où le module est réel et plus petit que un, est suivie d'applications à la biquadratique gauche, à la surface des ondes, au pendule simple, à l'élastique plane, à la corde à sauter, aux mouvements à la Poinsot ; l'étude de la fonction $\wp$, dans le cas de deux périodes imaginaires conjuguées, est suivie de l'application au mouvement d'un projectile dans un milieu dont la résistance est proportionnelle au cube de la vitesse. Viennent ensuite quelques applications au problème de Lamé et au problème de l'élastique plane sous pression normale constante, dont les intégrales, découvertes par M. Maurice Lévy, ont été converties en formules elliptiques par Halphen.

L'Ouvrage se termine par la Théorie des fonctions que

M. Hermite a appelées *fonctions doublement périodiques de deuxième ou de troisième espèce*, avec applications à l'équation de Lamé et aux équations de M. Picard, et par quelques notions élémentaires sur les fonctions modulaires qui fournissent l'exemple le plus simple des fonctions fuchsiennes et kleinéennes de M. Poincaré. Comme pour les fonctions elliptiques, nous donnons pour les fonctions doublement périodiques de deuxième espèce deux formes essentielles : décomposition en facteurs et décomposition en éléments simples, d'après M. Hermite : puis nous indiquons, pour les fonctions de troisième espèce, deux formes analogues, en employant l'élément simple introduit par M. Appell.

Les principales formules sont résumées dans un Tableau placé à la fin du Volume. Sauf dans l'exposé de la transformation de Landen, nous n'avons pas donné de Tables numériques, car, dans la plupart des cas, les séries définissant les fonctions à calculer sont si rapidement convergentes, que les premiers termes suffisent dans les applications. On trouvera des exemples de calculs numériques à la fin du *Calcul intégral* de M. J. Bertrand et dans les Tables de Hoüel.

Nous espérons qu'après avoir étudié cet Ouvrage, le lecteur pourra se servir des fonctions elliptiques comme des fonctions trigonométriques. Nous avons choisi des applications aussi variées que possible : on en trouvera d'autres, d'une grande élégance, dans le Traité de M. Greenhill. Quant aux développements théoriques, nous pensons avoir mis le lecteur à même de lire les grands Traités de Briot et Bouquet, d'Halphen, de MM. Tannery et Molk, et de se servir utilement des feuilles de M. Schwarz.

Paris, 27 septembre 1896.

PRINCIPES

DE LA THÉORIE DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES.

CHAPITRE I.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

I. — GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS UNIFORMES.

1. Fonction régulière en un point. Zéros. — Une fonction d'une variable imaginaire $u = x + yi$ est dite *uniforme* pour toutes les valeurs de u quand elle n'a qu'une valeur pour chaque valeur de u : par exemple $\frac{1}{u}$, $\cos u$, $\operatorname{tang} u$ sont des fonctions uniformes. On dit aussi, en représentant la variable $u = x + yi$ par le point d'un plan de coordonnées x et y, que la fonction est *uniforme dans tout le plan*. Nous ne nous occuperons que de fonctions de cette nature. Une fonction uniforme $f(u)$ est *régulière* en un point a quand on peut, dans un cercle ayant ce point comme centre, la développer par la formule de Taylor en une série procédant suivant les puissances positives croissantes de $u - a$

$$(1) \qquad f(u) = f(a) + \frac{(u-a)}{1} f'(a) + \ldots + \frac{(u-a)^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(a) + \ldots.$$

Zéros. — Une fonction $f(u)$ régulière au point $u = a$ admet ce point comme zéro quand $f(a)$ est nul : si $f'(a)$ n'est pas nul le zéro est simple. Si un certain nombre de dérivées $f'(a)$, $f''(a)$, ... sont nulles, $f^{(n)}(a)$ étant la première dérivée non nulle, le zéro $u = a$ est d'ordre n : on peut alors écrire le développement ci-

dessus

$$f(u) = (u-a)^n g(u), \tag{2}$$

où le facteur $g(u)$ est une série entière en $(u-a)$ ne s'annulant pas pour $u=a$.

2. **Points singuliers. Pôles. Résidus. Points singuliers essentiels.** — Lorsqu'une fonction uniforme $f(u)$ n'est pas régulière en un point déterminé a, on dit que ce point est un point *singulier*. C'est un point singulier isolé quand on peut décrire de a comme centre un cercle assez petit pour que la fonction n'ait pas d'autre point singulier dans ce cercle.

Pôles. — Un point singulier a est un pôle quand il est isolé et quand la fonction devient *infinie en ce point* à la façon d'une fraction rationnelle. Pour préciser, le point a est un pôle, quand la fonction $f(u)$ devient infinie en ce point et qu'il existe une fraction rationnelle

$$\varphi(u) = \frac{A}{u-a} + \frac{A_1}{(u-a)^2} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{(u-a)^\alpha},$$

telle que la différence

$$f(u) - \varphi(u)$$

soit régulière au point a; les lettres A, A_1, ..., $A_{\alpha-1}$ désignant des constantes. La fraction rationnelle $\varphi(u)$ s'appelle la *partie principale* de la fonction $f(u)$ relative au pôle a; le coefficient A de $\frac{1}{u-a}$ est le *résidu* relatif à ce pôle : l'entier α est l'ordre ou degré du pôle. On a alors, dans un certain cercle de centre a,

$$f(u) = \varphi(u) + g(u),$$

$g(u)$ étant une fonction régulière au point a : on en conclut, en réduisant le second membre au même dénominateur $(u-a)^\alpha$,

$$f(u) = \frac{G(u)}{(u-a)^\alpha},$$

$G(u)$ étant une fonction régulière au point a, différente de zéro pour $u=a$.

Nous dirons aussi que le point a est un infini d'ordre α de la fonction.

Points singuliers essentiels. — Quand un point singulier n'est pas isolé ou qu'étant isolé il n'est pas un pôle, on dit qu'il est un point *singulier essentiel*. Nous ne nous occupons dans la suite que de fonctions dont les seuls points singuliers à distance finie sont des pôles.

3. **Remarque sur les zéros et les pôles.** — Si le point a est un zéro d'ordre n de la fonction $f(u)$, il est un pôle simple de résidu n dans la dérivée logarithmique $\frac{f'(u)}{f(u)}$; en effet, on a alors, dans le voisinage de $u = a$,

$$f(u) = (u-a)^n g(u),$$

puis en prenant les logarithmes et les dérivées

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = \frac{n}{u-a} + \frac{g'(u)}{g(u)};$$

comme $g(u)$ n'est pas nul pour $u = a$, le rapport $\frac{g'(u)}{g(u)}$ est une fonction régulière au point a; donc ce point est un pôle simple de résidu n de $\frac{f'(u)}{f(u)}$. De même, si le point $u = a$ est un pôle d'ordre α de $f(u)$, il est un pôle simple de résidu $-\alpha$ de $\frac{f'(u)}{f(u)}$. On a en effet, dans cette hypothèse, au voisinage de a,

$$f(u) = \frac{G(u)}{(u-a)^\alpha},$$

d'où

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = \frac{-\alpha}{u-a} + \frac{G'(u)}{G(u)};$$

comme $G(u)$ ne s'annule pas pour $u = a$, $\frac{G'(u)}{G(u)}$ est une fonction régulière en a et le théorème est démontré.

4. **Point à l'infini.** — Pour étudier une fonction $f(u)$ de u quand u devient très grand, on fait $u = \frac{1}{u'}$ et l'on suppose u' très petit. La fonction $f(u)$ est dite *régulière* au point $u = \infty$

quand $f\left(\frac{1}{u'}\right)$ est régulière au point $u'=0$: on a alors, pour des valeurs très petites de u',

$$f\left(\frac{1}{u'}\right)=a_0+a_1u'+a_2u'^2+\ldots,$$

et par suite, pour des valeurs très grandes de u,

$$f(u)=a_0+a_1\frac{1}{u}+a_2\left(\frac{1}{u}\right)^2+\ldots.$$

Lorsque la fonction est ainsi régulière au point ∞, le point ∞ est un zéro d'ordre n quand $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sont nuls, a_n étant différent de zéro. La fonction s'annule alors à l'infini comme $\left(\frac{1}{u}\right)^n$.

Le point infini est un pôle ou un point singulier essentiel pour $f(u)$ quand le point $u'=0$ est un pôle ou un point essentiel pour $f\left(\frac{1}{u'}\right)$. Supposons que ce soit un pôle : alors, par définition, on a pour de petites valeurs de u'

$$f\left(\frac{1}{u'}\right)=\frac{A}{u'}+\frac{A_1}{u'^2}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{u'^{\alpha}}+a_0+a_1u'+a_2u'^2+\ldots,$$

c'est-à-dire, pour de grandes valeurs de u,

$$f(u)=Au+A_1u^2+\ldots+A_{\alpha-1}u^{\alpha}+a_0+a_1\frac{1}{u}+a_2\left(\frac{1}{u}\right)^2+\ldots.$$

La partie

$$\varphi(u)=Au+A_1u^2+\ldots+A_{\alpha-1}u^{\alpha},$$

qui devient infinie au pôle $u=\infty$, est la partie principale relative à ce pôle, α est l'ordre du pôle.

5. **Remarque sur la convergence des séries.** — Nous pouvons maintenant préciser un point important dans ce qui précède. Nous avons dit que la fonction $f(u)$ uniforme dans tout le plan est régulière en a quand elle est développable par la formule de Taylor dans un cercle de centre a : *cette série sera convergente dans le cercle ayant pour centre a et pour rayon la distance du point a au point singulier de $f(u)$ le plus rapproché de a.*

C'est là une proposition que nous admettrons pour ne pas allonger ce Chapitre.

6. **Une fonction uniforme régulière en tous les points à distance finie et infinie est une constante.** — En effet, la fonction supposée $f(u)$ étant régulière au point $u = 0$ est développable en une série

$$f(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \ldots,$$

convergente dans le cercle ayant l'origine comme centre et passant par le point singulier le plus rapproché de l'origine; comme, par hypothèse, il n'y a pas de points singuliers, cette série est convergente dans tout le plan. Pour étudier la fonction dans le voisinage du point ∞, posons $u = \frac{1}{u'}$; alors

$$f\left(\frac{1}{u'}\right) = a_0 + a_1 \frac{1}{u'} + a_2 \left(\frac{1}{u'}\right)^2 + \ldots.$$

Par hypothèse cette fonction est régulière au point $u' = 0$: elle ne doit donc pas contenir dans son développement de puissances *négatives* de u' : donc tous les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sont nuls, sauf le premier a_0, et l'on a

$$f(u) = f\left(\frac{1}{u'}\right) = a_0.$$

La fonction est une constante.

On peut énoncer ce résultat sous une autre forme, en disant qu'*une fonction uniforme partout finie* (le point ∞ compris) *est une constante*. En effet, une fonction uniforme devient infinie en chacun de ses pôles; on peut en outre démontrer rigoureusement que, si la variable u tend vers un point singulier essentiel de la fonction suivant une loi convenablement choisie, le module de la fonction croît au delà de toute limite. Si donc une fonction uniforme est partout finie, elle ne peut pas avoir de points singuliers, elle est régulière partout et se réduit à une constante.

7. **Les zéros et les pôles d'une fonction uniforme, n'ayant d'autres singularités que des pôles à distance finie, sont nécessairement isolés les uns des autres.** — Nous voulons dire par là qu'il ne peut pas exister de point a du plan dans le voisinage immédiat duquel il

se trouve une infinité de pôles ou une infinité de zéros; ou encore, quel que soit le point a, on peut toujours décrire de a comme centre un cercle avec un rayon assez petit pour que dans ce cercle il y ait : ou bien ni zéro ni pôle, ou bien un seul zéro sans pôle, ou bien un seul pôle sans zéro.

Ce fait résulte immédiatement des développements précédents. En effet, un point a étant marqué dans le plan, trois cas peuvent se présenter suivant que $f(u)$ est régulière en a sans s'annuler en ce point, ou que $f(u)$ admet le point a pour zéro, ou enfin que $f(u)$ admet le point a pour pôle. Dans le premier cas, on peut décrire de a comme centre un cercle suffisamment petit pour qu'il n'y ait dans ce cercle ni zéro ni pôle; dans le second, on peut décrire un cercle suffisamment petit pour qu'il ne contienne pas de pôle et contienne le seul zéro $u=a$; dans le troisième, on peut décrire un cercle ne contenant pas de zéro et contenant le seul pôle a.

D'après cela, si pour une fonction uniforme il existe un point a tel que, dans une aire aussi petite que l'on veut, entourant ce point, il existe soit une infinité de pôles soit une infinité de zéros, ce point est point singulier *essentiel*. En effet, la fonction n'est pas régulière en a; ce point est donc un point singulier. Il n'est pas un pôle, d'après ce que nous venons de voir; il est donc un point *essentiel*.

Nous allons, dans les deux paragraphes suivants, traiter, comme exemples, les fonctions rationnelles et les fonctions trigonométriques.

II. — Fractions rationnelles.

8. **Objet du paragraphe.** — Le lecteur connaît assurément les propriétés des fractions rationnelles : décomposition en fractions simples, utilité de cette décomposition pour l'intégration, décomposition en un quotient de deux produits de facteurs linéaires.

Nous reprenons brièvement cette théorie, en suivant une marche analogue à celle que nous emploierons plus loin pour obtenir l'expression générale des fonctions elliptiques, d'abord sous une forme toute semblable à celle d'une fraction rationnelle décomposée en fractions simples, puis sous une forme semblable à celle d'une

fraction rationnelle décomposée en un quotient de deux produits de facteurs linéaires.

9. **Fraction rationnelle particulière.** — La fonction

$$f(u) = \frac{u}{(u-1)(u-2)} \tag{3}$$

est régulière à distance finie en tous les points autres que $u=1$, $u=2$. Ces deux points sont des pôles de premier ordre. La partie principale relative au pôle $u=1$ est

$$\varphi_1(u) = -\frac{1}{u-1};$$

en effet on vérifie immédiatement que la différence $f(u)-\varphi_1(u)$ est régulière au point $u=1$. Le résidu relatif au pôle $u=1$ est -1. De même la partie principale relative au pôle $u=2$ est

$$\varphi_2(u) = \frac{2}{u-2},$$

avec le résidu 2. Au point ∞ la fonction est régulière, car

$$f\left(\frac{1}{u'}\right) = \frac{u'}{(1-u')(1-2u')}$$

est régulière au point $u'=0$. On voit que $u'=0$, c'est-à-dire $u=\infty$ est un zéro simple. La fonction $f(u)$ a donc deux pôles simples $u=1$, $u=2$ et deux zéros simples $u=0$, $u=\infty$: on dit qu'elle est d'ordre 2. On peut remarquer que l'équation

$$f(u) = C$$

a deux racines quelle que soit la constante C.

Comme les fonctions $\varphi_1(u)$ et $\varphi_2(u)$ sont régulières partout à distance finie et infinie, excepté aux pôles respectifs 1 et 2, la différence

$$f(u) - \varphi_1(u) - \varphi_2(u)$$

est régulière *partout* à distance finie et infinie, y compris les pôles 1 et 2, d'après la définition des parties principales φ_1 et φ_2. Cette différence est donc une *constante* et, comme elle s'annule à l'infini, puisque chacune des fonctions f, φ_1, φ_2 s'y annule, elle

est *égale à zéro*. On a donc

$$f(u) = \varphi_1(u) + \varphi_2(u),$$

formule que donnerait immédiatement la décomposition de la fraction rationnelle en fractions simples.

10. Cas général. Pôles et zéros. Ordre. — Une fraction rationnelle

$$(1) \qquad f(u) = \frac{a_0 u^m + a_1 u^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0 u^n + b_1 u^{n-1} + \ldots + b_n} = \frac{P(u)}{Q(u)},$$

où P et Q sont deux polynomes de degrés m et n, est une fonction qui, à distance finie et infinie, n'a d'autres points singuliers que des pôles. A distance finie elle a comme pôles les racines de $Q(u) = 0$: le nombre des pôles à distance finie, en comptant chacun d'eux avec son degré de multiplicité, est donc n.

1° Si $m > n$, le point ∞ est un pôle d'ordre $m - n$. Le nombre total des pôles à distance finie et infinie est donc

$$n + (m - n) = m.$$

Il y a aussi m zéros qui sont les racines de $P(u) = 0$. La fraction a donc m pôles et m zéros : on dit qu'elle est d'ordre m. L'équation $f(u) = C$ a m racines quel que soit C.

2° Si $n > m$ le point ∞ est un zéro d'ordre $n - m$. La fraction a alors n pôles et un nombre égal de zéros, car il y en a m à distance finie [les racines de $P(u)$] et $n - m$ réunis à l'infini. La fraction est d'ordre n; l'équation $f(u) = C$ a toujours n racines.

3° Si $m = n$, le point ∞ n'est ni un pôle ni un zéro : il y a encore autant de zéros que d'infinis : la fraction est d'ordre $m = n$.

En résumé une fonction rationnelle $f(u)$ a toujours dans tout le plan, l'infini compris, autant de *pôles* que de *zéros;* le nombre des pôles ou des zéros est l'ordre de la fraction : l'équation $f(u) = C$, a, quel que soit C, un nombre de racines égal à l'*ordre*.

11. Formes analytiques principales des fractions rationnelles. — On peut mettre une fraction rationnelle sous deux formes dif-

férentes suivant que l'on veut mettre en évidence les pôles et les parties principales, ou les pôles et les zéros.

1° *Première forme mettant en évidence les pôles et les parties principales correspondantes. Décomposition en fractions simples.* — Appelons $a, b, \ldots, l$ les pôles à distance finie respectivement d'ordre $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ et

$$\varphi_1(u) = \frac{A}{u-a} + \frac{A_1}{(u-a)^2} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{(u-a)^\alpha},$$
$$\varphi_2(u) = \frac{B}{u-b} + \frac{B_1}{(u-b)^2} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{(u-b)^\beta}, \quad \ldots$$

les parties principales correspondantes. Supposons, pour plus de généralité, que le point ∞ soit un pôle, ce qui arrive si $m > n$; et soit

$$\varpi(u) = M_1 u + M_2 u^2 + \ldots + M_s u^s$$

la partie principale relative à ce pôle

$$s = m - n.$$

Chacune de ces parties principales est régulière partout excepté au pôle correspondant. La différence

$$(5) \qquad f(u) - \varphi_1(u) - \varphi_2(u) - \ldots - \varpi(u)$$

est donc régulière *partout à distance finie et infinie*. En effet, au pôle a la différence $f(u) - \varphi_1(u)$ est régulière et les fonctions $\varphi_2, \ldots, \varpi$ le sont. Il en est de même aux pôles $b, \ldots, l$.

A l'infini, la différence $f(u) - \varpi(u)$ est régulière et les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ le sont aussi. Donc la différence (5), régulière partout, est une constante M_0, et l'on a

$$f(u) = M_0 + \varpi(u) + \varphi_1(u) + \varphi_2(u) + \ldots,$$
$$(6) \quad f(u) = M_0 + M_1 u + \ldots + M_s u^s + \sum \left[\frac{A}{u-a} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{(u-a)^\alpha} \right],$$

la somme Σ étant étendue à tous les pôles à distance finie.

On retrouve ainsi la formule élémentaire de décomposition des fractions rationnelles en fractions simples : elle met en évidence les pôles et les parties principales correspondantes, elle donne immédiatement l'intégrale d'une fraction rationnelle.

On peut écrire

$$f(u) = M_0 + \sum \left[\frac{A}{u-a} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{(u-a)^\alpha} \right],$$

la somme Σ étant étendue à tous les pôles à distance finie et infinie, si l'on convient que pour un pôle a rejeté à l'infini $\frac{1}{u-a}$ doive être remplacé par u, ou en abrégé que

$$u - a = \frac{1}{u} \qquad \text{quand } a = \infty.$$

On remarquera que l'on peut prendre arbitrairement les parties principales relatives à tous les pôles; à cet égard il y a une légère différence pour les fonctions elliptiques.

2° *Deuxième forme mettant en évidence les zéros et les infinis.* — La deuxième forme qu'on peut donner à une fraction rationnelle met en évidence *les zéros et les infinis*. Il suffit pour cela de décomposer les polynomes P et Q, qui forment le numérateur et le dénominateur de la fraction, en facteurs du premier degré

$$(7) \qquad f(u) = C \frac{(u-\alpha_1)(u-\alpha_2)\ldots(u-\alpha_m)}{(u-\beta_1)(u-\beta_2)\ldots(u-\beta_n)},$$

où certains facteurs peuvent être égaux.

3° *La seconde forme déduite de la première.* — Soit $f(u)$ la fraction rationnelle considérée ayant pour zéros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ et pour pôles $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$.

La fonction $\frac{f'(u)}{f(u)}$ est aussi une fraction rationnelle ayant pour pôles simples les zéros et les infinis de $f(u)$ (n° 3), les zéros simples avec le résidu $+1$ et les pôles simples avec le résidu -1.

En mettant alors $\frac{f'(u)}{f(u)}$ sous la première forme (décomposition en fractions simples) on a

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = \frac{1}{u-\alpha_1} + \frac{1}{u-\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{u-\alpha_m} - \frac{1}{u-\beta_1} - \frac{1}{u-\beta_2} - \ldots - \frac{1}{u-\beta_n}.$$

Intégrant et passant des logarithmes aux nombres, on retrouve l'expression (7).

12. **Remarque.** — Nous venons de voir qu'une fraction rationnelle n'a d'autres points singuliers que des pôles à distance finie et infinie. La réciproque est vraie. *Une fonction uniforme n'ayant d'autres singularités à distance finie et infinie que des pôles est une fraction rationnelle.* Nous nous bornons à rappeler ce théorème dont nous n'aurons pas à nous servir.

13. **Relation algébrique entre deux fractions rationnelles. Théorème d'addition algébrique.** — Entre deux fractions rationnelles

$$x = f(u), \qquad y = f_1(u)$$

a lieu une relation algébrique définissant une courbe unicursale, c'est-à-dire une courbe ayant le plus de points doubles possible.

En outre, une fonction rationnelle $f(u)$ admet un théorème d'addition algébrique, c'est-à-dire que, u et v désignant deux variables indépendantes, $f(u+v)$ est une fonction algébrique de $f(u)$ et $f(v)$.

III. — Fonctions trigonométriques.

14. **Objet du paragraphe.** — Nous allons présenter les points fondamentaux de la théorie des fonctions trigonométriques, en suivant une voie identique à celle que nous suivrons dans le Chapitre suivant pour les fonctions elliptiques.

15. **Fonction $\sin u$, sa définition par un produit infini. Fonctions $\cot u$ et $\frac{1}{\sin^2 u}$, leurs expressions par des séries. Périodicité de ces fonctions.** — La fonction $\sin u$ est régulière en tous les points à distance finie. Elle s'annule aux points

$$u = 0, \qquad \pm\pi, \qquad \pm 2\pi, \qquad \ldots.$$

C'est ce que met en évidence la formule suivante que nous supposons connue et que nous considérons comme servant de

définition à $\sin u$

(8) $$\sin u = u \prod{}' \left(1 - \frac{u}{m\pi}\right) e^{\frac{u}{m\pi}},$$

le produit Π' étant étendu à toutes les valeurs de l'entier m de $-\infty$ à $+\infty$, la valeur $m = 0$ exceptée. Grâce à la présence du facteur $e^{\frac{u}{m\pi}}$, le produit Π' est convergent quel que soit l'ordre des facteurs. Cette fonction $\sin u$ est impaire, c'est ce qu'on voit sur le produit (8). En effet, comme m prend toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, on peut le changer de signe et écrire

$$\sin u = u \prod{}' \left(1 + \frac{u}{m\pi}\right) e^{-\frac{u}{m\pi}}.$$

Changeant ensuite u en $-u$ on voit, en comparant à (8), que $\sin(-u)$ est égal à $-\sin u$.

Le point ∞ est un point singulier essentiel de $\sin u$: en effet, si l'on fait $u = \frac{1}{u'}$, on voit que, dans une aire aussi petite qu'on le veut entourant le point $u' = 0$, la fonction $\sin \frac{1}{u'}$ admet une infinité de zéros $u' = \frac{1}{m\pi}$. D'après ce que nous avons vu (n° 7) le point $u' = 0$ est donc un point singulier essentiel.

Fonction $\cot u$. — La fonction $\cot u$ se déduit de $\sin u$, par la formule

$$\cot u = \frac{d}{du} \log \sin u.$$

D'après la formule (8), on a donc pour $\cot u$ la série

$$\cot u = \frac{1}{u} + \left(\frac{1}{u-\pi} + \frac{1}{\pi}\right) + \left(\frac{1}{u-2\pi} + \frac{1}{2\pi}\right) + \dots$$
$$+ \left(\frac{1}{u+\pi} - \frac{1}{\pi}\right) + \left(\frac{1}{u+2\pi} - \frac{1}{2\pi}\right) + \dots,$$

ou, sous forme condensée,

(9) $$\cot u = \frac{1}{u} + \sum{}' \left(\frac{1}{u - m\pi} + \frac{1}{m\pi}\right),$$

la somme Σ' étant étendue à toutes les valeurs de l'entier m

de $-\infty$ à $+\infty$, la valeur zéro exceptée. La fonction $\cot u$ est aussi impaire. Le développement (9) montre qu'elle a pour pôles simples tous les points $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$, le résidu relatif à chacun de ces pôles étant 1. Par exemple, le point $u = \pi$ est un pôle, et la différence

$$\cot u - \frac{1}{u - \pi}$$

est régulière au point $u = \pi$. La formule (9) met donc en évidence les pôles et les parties principales correspondantes de la fonction. Le point $u = \infty$ est un point singulier essentiel pour $\cot u$ comme pour $\sin u$.

Fonction $\frac{1}{\sin^2 u}$. — La fonction

$$(10) \qquad \frac{1}{\sin^2 u} = -\frac{d}{du}\cot u = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \frac{1}{(u - m\pi)^2}$$

est paire. Elle a pour pôles doubles tous les points $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$; la partie principale relative au pôle $u = m\pi$ est $\frac{1}{(u - m\pi)^2}$.

Périodicité. — Des formules précédentes on peut déduire facilement la périodicité des fonctions circulaires. Tout d'abord le développement (10) de $\frac{1}{\sin^2 u}$ montre immédiatement que cette fonction ne change pas quand on ajoute π à u, car cela ne fait que déplacer les termes du second membre.

On voit de même que la cotangente admet la période π; en effet, formant la différence $\cot(u + \pi) - \cot u$, on trouve

$$\left(\frac{1}{u + \pi} - \frac{1}{u}\right) + \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u - \pi}\right) + \left(\frac{1}{u - \pi} - \frac{1}{u - 2\pi}\right) + \ldots$$
$$+ \left(\frac{1}{u + 2\pi} - \frac{1}{u + \pi}\right) + \left(\frac{1}{u + 3\pi} - \frac{1}{u + 2\pi}\right) + \ldots,$$

somme qui est évidemment nulle, car les termes se détruisent deux à deux.

Enfin de la relation

$$\cot(u + \pi) = \cot u,$$

que nous venons d'établir, on peut déduire la périodicité de la fonction $\sin u$. En effet, en intégrant les deux membres de la relation ci-dessus, on a

$$\log\sin(u+\pi) = \log\sin u + \log C,$$
$$\sin(u+\pi) = C\sin u,$$

où C est une constante. Pour déterminer cette constante, faisons $u = -\frac{\pi}{2}$, nous aurons

$$\sin\frac{\pi}{2} = C\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

et comme la fonction $\sin u$ est *impaire* on a

$$C = -1.$$

D'où la formule

$$\sin(u+\pi) = -\sin u.$$

Développements en séries de puissances. — Pour calculer les premiers termes du développement de $\cot u$ en série de puissances dans le voisinage de $u=0$, on peut employer la méthode suivante analogue à celle qui nous servira pour les fonctions de M. Weierstrass. On a, pour u inférieur à $m\pi$ (en valeur absolue),

$$\frac{1}{u-m\pi} = -\frac{1}{m\pi} - \frac{u}{m^2\pi^2} - \frac{u^2}{m^3\pi^3} - \ldots;$$

portant cette série dans le développement de $\cot u$ et ordonnant par rapport aux puissances de u, on a une série de la forme

$$\cot u = \frac{1}{u} - s_1\frac{u}{\pi^2} - s_2\frac{u^3}{\pi^4} - s_3\frac{u^5}{\pi^6} - \ldots,$$

où l'on a posé

$$s_1 = \sum{}'\frac{1}{m^2}, \qquad s_2 = \sum{}'\frac{1}{m^4}, \qquad s_3 = \sum{}'\frac{1}{m^6};$$

les sommes $\sum{}'\frac{1}{m}$, $\sum{}'\frac{1}{m^3}$, $\sum{}'\frac{1}{m^5}$, $\cdots$ sont évidemment nulles, car m prend des valeurs deux à deux égales et de signes contraires.

On peut obtenir le développement de $\sin u$ en série entière en

intégrant le développement de $\cot u$, ce qui donne

$$\log \sin u = \log A + \log u - \frac{s_1}{2}\frac{u^2}{\pi^2} - \frac{s_2}{4}\frac{u^4}{\pi^4} - \frac{s_3}{6}\frac{u^6}{\pi^6} - \ldots,$$

$$\sin u = A u e^{-\frac{s_1}{2}\frac{u^2}{\pi^2} - \frac{s_2}{4}\frac{u^4}{\pi^4} - \frac{s_3}{6}\frac{u^6}{\pi^6} - \ldots},$$

A désignant une constante d'intégration. Comme $\frac{\sin u}{u}$ tend vers 1 quand u tend vers 0, on a $A = 1$. Développant alors l'exponentielle en série, on obtient une série entière donnant $\sin u$. En identifiant le développement ainsi obtenu avec la série connue

$$\sin u = u - \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{u^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

on obtient les valeurs des sommes s_1, s_2, s_3, ... On trouve ainsi

$$s_1 = \frac{\pi^2}{3}, \qquad s_2 = \frac{\pi^4}{3^2.5}, \qquad s_3 = \frac{2\pi^6}{3^3.5.7}.$$

Ces sommes sont bien connues : on les trouvera par exemple dans le *Calcul différentiel* de M. Bertrand, p. 421 : pour vérifier ainsi les valeurs ci-dessus, il faut se rappeler que

$$s_\nu = \sum{}' \frac{1}{m^{2\nu}} = 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{2\nu}},$$

car, dans Σ', m varie de $-\infty$ à $+\infty$, zéro exclu.

Exercice. — Nous ne nous arrêterons pas plus longtemps à la théorie des fonctions $\sin u$, $\cot u$. Si l'on voulait établir une théorie complète de ces fonctions, en prenant comme seules définitions le produit (8) et la série (9), on pourrait, en suivant une analyse d'Eisenstein (*Journal de Crelle*, t. 35, p. 191), montrer que la fonction $f(u) = \cot u$, définie par la série (9), vérifie l'équation différentielle

$$f' + f^2 + \frac{3s_1}{\pi^2} = 0, \qquad \text{où} \qquad \frac{3s_1}{\pi^2} = 1.$$

En portant le développement de $\cot u$ en série de puissances dans cette équation et écrivant qu'elle est vérifiée quel que soit u, on aurait un autre moyen de calculer de proche en proche les sommes s_ν. Nous indiquons ces résultats à titre d'exercice.

16. Fonctions trigonométriques en général. — On peut appeler d'une manière générale *fonction trigonométrique* une fonction $f(u)$ rationnelle en $\cot u$, car le sinus et le cosinus d'un arc s'expriment rationnellement en fonction de la cotangente de l'arc moitié que l'on peut toujours désigner par u. Une fonction trigonométrique, ainsi définie, est uniforme; elle n'a d'autres points singuliers à distance finie que des pôles; elle ne change pas quand on ajoute à u un multiple quelconque positif ou négatif de π : c'est ce que l'on exprime en disant que la fonction admet la *période primitive* π, ses autres périodes $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, ... étant des multiples de la période primitive.

On peut mettre une fonction trigonométrique sous deux formes remarquables. L'une est analogue à la formule de décomposition des fractions rationnelles en fractions simples; l'élément de cette décomposition est la fonction $\cot(u - \alpha)$ et ses dérivées; c'est ce que l'on pourra voir dans le *Traité d'Analyse* de M. Hermite, p. 321. L'autre forme est analogue à celle qui donne une fraction rationnelle sous forme du quotient de deux produits de facteurs linéaires; l'élément qui remplace les facteurs linéaires est $\sin(u - \alpha)$. Nous ne nous arrêterons pas à établir ces formules qui nous sont inutiles pour la suite.

Relations algébriques. — Entre deux fonctions trigonométriques

$$x = f(u), \qquad y = f_1(u),$$

de même période π, a lieu une relation algébrique définissant encore une courbe unicursale, car f et f_1 sont des fonctions rationnelles de $\cot u$.

Théorème d'addition algébrique. — Une fonction trigonométrique $f(u)$ admet un théorème d'addition algébrique : $f(u+v)$ est une fonction algébrique de $f(u)$ et $f(v)$.

Remarque sur la période des fonctions trigonométriques. — Les fonctions que nous venons de considérer admettent la période π

$$f(u + \pi) = f(u).$$

Il est évident que par un changement linéaire de variable on peut

faire en sorte qu'elles admettent une période quelconque 2ω. Il suffit de poser

$$u = \frac{\pi u'}{2\omega}, \qquad f_1(u') = f(u) = f\left(\frac{\pi u'}{2\omega}\right);$$

on a alors

$$f_1(u' + 2\omega) = f_1(u').$$

CHAPITRE II.

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

17. **Définition.** — Nous avons dit qu'une fraction rationnelle est caractérisée par la propriété d'être une fonction uniforme n'ayant d'autres singularités que des pôles.

Nous avons remarqué également qu'une fonction trigonométrique (fonction rationnelle de $\cot u$ ou de $\sin 2u$ et $\cos 2u$) est une fonction n'ayant d'autres singularités à distance finie que des pôles et admettant des périodes qui peuvent toutes être composées par addition et soustraction avec *une seule période primitive* π. Mais ces propriétés ne caractérisent pas les fonctions trigonométriques : elles appartiennent par exemple à $e^{\sin 2u}$ qui n'est pas une de ces fonctions. Pour achever de caractériser une fonction trigonométrique, il faudrait ajouter cette condition qu'elle possède un théorème d'addition algébrique.

Nous définirons d'une façon analogue les fonctions elliptiques par les propriétés suivantes, qui les caractérisent complètement :

On appelle fonction elliptique une fonction uniforme n'ayant, à distance finie, d'autres singularités que des pôles et admettant des périodes qui peuvent toutes être composées par addition et soustraction avec deux *périodes primitives* 2ω *et* $2\omega'$.

La fonction admet donc les deux périodes 2ω et $2\omega'$; on dit qu'elle est *doublement périodique*, tandis que les fonctions trigonométriques sont *simplement* périodiques. Elle vérifie les relations

$$(11) \qquad f(u+2\omega)=f(u), \qquad f(u+2\omega')=f(u),$$

d'où l'on conclut

$$(12) \qquad f(u+2m\omega+2n\omega')=f(u),$$

m et n désignant des entiers positifs, négatifs ou nuls.

Nous admettrons que le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ est *imaginaire;* s'il était réel, la fonction se réduirait à une fonction simplement périodique ou à une constante. C'est là un fait dont on trouvera la démonstration dans la Note I et que l'on peut admettre pour ne pas interrompre l'exposition.

Les fonctions elliptiques sont ainsi définies *in abstracto*. Nous allons définir, par des séries, les éléments analytiques à l'aide desquels on peut exprimer toutes les fonctions elliptiques. Nous indiquerons en même temps leurs principales propriétés, parmi lesquelles nous signalerons dès à présent l'existence d'un théorème d'addition algébrique et l'existence d'une relation algébrique entre deux fonctions elliptiques aux mêmes périodes.

Une première propriété, résultant immédiatement de la définition même, est celle-ci : *La dérivée d'une fonction elliptique est encore une fonction elliptique*. En effet, les relations (11) ayant lieu quel que soit u donnent par différentiation

$$f'(u+2\omega) = f'(u),$$
$$f'(u+2\omega') = f'(u).$$

La dérivée $f'(u)$ admet donc les périodes 2ω et $2\omega'$; elle est uniforme comme $f(u)$ et ses seuls points singuliers à distance finie sont des pôles, car si $f(u)$ est régulière en un point il en est de même de $f'(u)$, et si $f(u)$ a un pôle en un point il en est de même de $f'(u)$.

18. **Parallélogrammes des périodes.** — La double périodicité peut se représenter géométriquement comme il suit. Soit u_0 une quantité imaginaire constante, choisie au hasard; considérons dans le plan représentatif les points représentant les quantités

$$u_0, \quad u_0 \pm 2\omega, \quad u_0 \pm 2\omega', \quad u_0 \pm 2\omega \pm 2\omega'$$

et, en général,

$$u_0 + 2m\omega + 2n\omega',$$

où m et n sont des entiers quelconques positifs, négatifs ou nuls; ces points forment les sommets d'un réseau de parallélogrammes tous égaux au parallélogramme P, qui a pour sommets les

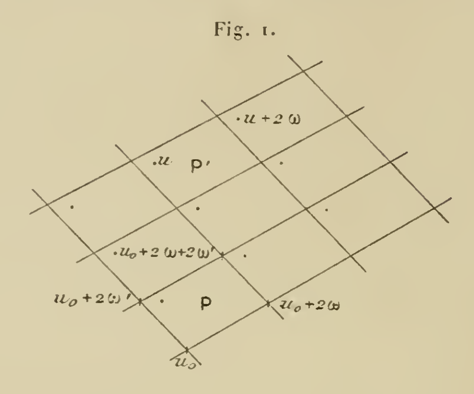
points

$$u_0, \quad u_0 + 2\omega, \quad u_0 + 2\omega', \quad u_0 + 2\omega + 2\omega',$$

et recouvrant tout le plan.

Si u est un point quelconque du plan, il se trouve dans un de ces parallélogrammes, le parallélogramme P', par exemple; le point $u + 2\omega$ est dans un parallélogramme voisin dans lequel il

Fig. 1.



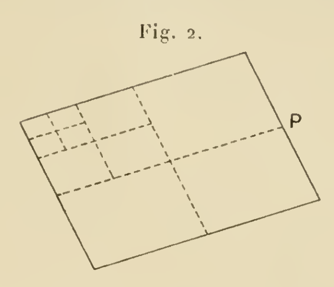
occupe la même position que u dans P'; en général, les points $u + 2m\omega + 2n\omega'$ sont tous dans des parallélogrammes différents; ils occupent dans chacun d'eux la même place que u dans P'; nous avons figuré quelques-uns de ces points. On dit, pour abréger, que ces points sont des points *homologues* ou *congruents* du réseau des parallélogrammes. L'un quelconque de ces parallélogrammes s'appelle *parallélogramme des périodes* ou *parallélogramme élémentaire*.

Les relations (11) expriment que la fonction $f(u)$ reprend *la même valeur en tous les points homologues*. Il suffit donc de connaître la fonction $f(u)$ dans un des parallélogrammes, P par exemple, pour *la connaître dans tout le plan*.

19. **Théorème fondamental. Une fonction elliptique devient nécessairement infinie dans un parallélogramme élémentaire, sinon elle se réduit à une constante.** — En effet, si une fonction elliptique était finie, dans un parallélogramme élémentaire, elle serait finie, en tous les points à distance *finie* ou infinie, à cause de la double périodicité; ce serait donc une constante (n° 6).

20. **Une fonction elliptique a un nombre limité de pôles dans un parallélogramme élémentaire.** — Le théorème précédent montre qu'une fonction elliptique a au moins un pôle dans un parallélogramme; nous voulons montrer qu'elle en a un nombre limité. En effet, supposons que, dans P, une fonction $f(u)$ ait une infinité de pôles; divisons le parallélogramme en quatre en joignant les

Fig. 2.



milieux des côtés; dans un de ces quatre parallélogrammes au moins il y a une infinité de pôles. Divisons-le encore en quatre en joignant les milieux des côtés; dans un des nouveaux parallélogrammes au moins, il y a une infinité de pôles. En continuant ainsi, on obtient une suite de parallélogrammes tendant vers un point a du plan et contenant tous une infinité de pôles. En ce point a la fonction n'est évidemment pas régulière : le point a est donc un point singulier; mais il ne peut pas être un pôle, car un pôle est nécessairement isolé et nous venons de voir que, dans une aire aussi petite qu'on le veut autour de a, il existe une infinité de pôles. Ce point est donc un *point singulier essentiel* de la fonction, ce qui est impossible, puisqu'une fonction elliptique, par *définition, n'a d'autres points singuliers que des pôles dans un parallélogramme.*

Le théorème que nous venons de démontrer est d'ailleurs une conséquence immédiate de la proposition générale du n° 7.

Ainsi, une fonction elliptique a un nombre limité de pôles dans un parallélogramme élémentaire, tout comme une fraction rationnelle en a un nombre limité dans tout le plan.

Nous allons donner une première expression analytique des fonctions elliptiques mettant en évidence ces pôles et leurs parties principales; cette expression jouera le même rôle que la formule de décomposition des fractions rationnelles en fractions simples.

Voici comment on forme la fonction qui joue dans la théorie des fonctions elliptiques le même rôle que la fraction simple $\frac{1}{u-a}$ dans la théorie des fractions rationnelles.

21. **Fonctions** σ, ζ, p, Z, H. — Nous avons rappelé précédemment le développement en produit de $\sin u$

$$\sin u = u \prod{}' \left(1 - \frac{u}{m\pi}\right) e^{\frac{u}{m\pi}},$$

mettant en évidence les zéros : $0, \pm\pi, \pm 2\pi$ de cette fonction.

Par analogie nous allons former avec M. Weierstrass une fonction régulière, comme le sinus, en tous les points à distance finie et admettant comme zéros le point $u = 0$ et tous les points

$$2m\omega + 2n\omega' \qquad \begin{pmatrix} m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{pmatrix},$$

homologues de l'origine dans le réseau des parallélogrammes. Posons, pour abréger,

$$w = 2m\omega + 2n\omega',$$

et considérons la fonction définie par la formule

$$(13) \qquad \sigma u = u \prod{}' \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}} \qquad \left\{ \begin{matrix} m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty \\ w = 2m\omega + 2n\omega' \\ w = 0 \text{ exclus} \end{matrix} \right\},$$

dans laquelle il faut, pour former le produit infini, attribuer à la quantité w toutes les valeurs contenues dans l'expression $2m\omega + 2n\omega'$, à l'exception de la seule valeur 0 qui correspond à $m = n = 0$.

Quand cette exception doit être observée dans un produit infini ou dans une somme infinie, nous le rappelons en faisant suivre d'un accent la caractéristique Π ou Σ du produit ou de la somme. Actuellement, nous admettons la convergence du produit (13); on en trouvera une démonstration dans la Note II.

La fonction σu ainsi définie s'annule seulement aux points $u = 0$ et $u = w = 2m\omega + 2n\omega'$; elle ne devient jamais infinie

pour des valeurs finies de u. On voit que cette fonction a un zéro simple et un seul dans chaque parallélogramme élémentaire. Tous ces zéros sont des points homologues du réseau de parallélogrammes.

Cette fonction σ est impaire comme un sinus

$$\sigma(-u) = -\sigma u;$$

en effet, comme m et n prennent toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, on peut, dans l'expression du produit, changer m et n de signes sans changer ce produit; on a donc aussi

$$\sigma u = u \prod{}' \left(1 + \frac{u}{w}\right) e^{-\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}.$$

Mais alors, en changeant u en $-u$ et comparant au produit (13), on voit que $\sigma(-u) = -\sigma u$.

Enfin, il résulte du produit infini que le rapport $\frac{\sigma u}{u}$ tend vers 1 quand u tend vers zéro.

De même que l'on déduit la fonction $\cot u$ de $\sin u$, en prenant la dérivée logarithmique, nous considérerons la fonction obtenue en prenant la dérivée logarithmique de σu

$$(14) \qquad \zeta u = \frac{d \log \sigma u}{du} = \frac{\sigma' u}{\sigma u} = \frac{1}{u} + \sum{}' \left[\frac{1}{u - w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} \right].$$

Nous désignerons pour abréger cette nouvelle fonction par $\frac{\sigma'}{\sigma}(u)$ ou ζu. La série qui définit ζu est analogue à celle qui définit $\cot u$. Elle montre que la fonction ζu a pour pôles simples tous les points $u = 0$, $u = 2m\omega + 2n\omega'$, avec le résidu $+1$. En effet, la différence

$$\zeta u - \frac{1}{u - 2m\omega - 2n\omega'},$$

où m et n sont des entiers déterminés, est régulière au point $u = 2m\omega + 2n\omega'$. La fonction ζ a donc un pôle simple de résidu $+1$ dans chaque parallélogramme élémentaire. Il en est de même de la fonction $\zeta(u - a)$, où a est une constante; cette fonction a comme seuls points singuliers les points $u = a$ et $u = a + 2m\omega + 2n\omega'$, qui sont des pôles du premier ordre de

résidu $+1$; il y a un de ces pôles et un seul dans chaque parallélogramme. Ainsi $u=a$ est un pôle et la différence $\zeta(u-a)-\frac{1}{u-a}$ est régulière au point $u=a$.

La fonction ζu est impaire comme la cotangente; on peut le vérifier directement ou le conclure de ce que σu étant impaire, sa dérivée $\sigma' u$ est paire et le quotient $\frac{\sigma'}{\sigma}$ *impair*.

Pour étudier les propriétés de cette fonction prenons-en la dérivée et appelons pu cette dérivée changée de signe

$$(15) \qquad pu = -\frac{d^2 \log \sigma u}{du^2} = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right];$$

cette fonction étant la dérivée d'une fonction impaire est *paire :* elle a pour pôles doubles les points $u=0$, $u=2m\omega+2n\omega'$; la partie principale relative à l'un de ces pôles est $\frac{1}{(u-2m\omega-2n\omega')^2}$, le résidu correspondant est *nul*. Cette fonction pu est donc analogue à la fonction $\frac{1}{\sin^2 u}$ donnée par

$$\frac{1}{\sin^2 u} = -\frac{d^2 \log \sin u}{du^2} = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \frac{1}{(u-m\pi)^2}.$$

La fonction $p(u-a)$, où a est constant, a pour pôles doubles les points a et $a+2m\omega+2n\omega'$; la partie principale relative à un de ces pôles est $\frac{1}{(u-a-2m\omega-2n\omega')^2}$; il y a un de ces pôles et un seul dans chaque parallélogramme élémentaire.

Périodicité de pu. — La fonction pu admet les deux périodes 2ω et $2\omega'$.

En effet, si l'on forme la différence $p(u+2\omega)-pu$, on a

$$\begin{aligned} p(u+2\omega)-pu &= \frac{1}{(u+2\omega)^2} - \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u+2\omega-w)^2} - \frac{1}{(u-w)^2}\right] \\ &= \sum \left\{\frac{1}{[u-2(m-1)\omega-2n\omega']^2} - \frac{1}{(u-2m\omega-2n\omega')^2}\right\}, \end{aligned}$$

où la dernière somme est étendue à toutes les valeurs de m et n sans exception. Cette dernière somme est évidemment nulle, car, en considérant les termes qui correspondent à une même valeur

de n, on voit qu'ils se détruisent deux à deux. On a donc

(16) $$p(u+2\omega) = pu;$$

de même, on trouverait

(16') $$p(u+2\omega') = pu.$$

Effet de l'addition des périodes à l'argument de ζu. — Intégrons ces deux dernières relations en nous rappelant que l'intégrale de pu est $-\frac{\sigma' u}{\sigma u}$ ou $-\zeta u$, nous aurons

(17) $$\begin{cases} \zeta(u+2\omega) = \zeta u + 2\eta_1, \\ \zeta(u+2\omega') = \zeta u + 2\eta_1', \end{cases}$$

où η_1 et η_1' désignent deux constantes introduites par l'intégration. En faisant dans ces relations $u = -\omega$, puis $u = -\omega'$, on a

$$\zeta(\omega) = \zeta(-\omega) + 2\eta_1, \qquad \zeta(\omega') = \zeta(-\omega') + 2\eta_1',$$

d'où il résulte, puisque ζ est impaire,

(18) $$\eta_1 = \zeta(\omega), \qquad \eta_1' = \zeta(\omega');$$

ces constantes η_1 et η_1' sont ainsi exprimées par des séries convergentes.

Notation de Jacobi et de M. Hermite. — Dans la notation de M. Weierstrass c'est cette fonction $\frac{\sigma'}{\sigma}$ ou ζ qui joue le même rôle que $\frac{1}{u}$ dans la théorie des fractions rationnelles. Dans la notation de Jacobi, légèrement modifiée par M. Hermite (*Crelle*, t. 84), ce rôle est joué par la fonction *impaire*

(19) $$Z(u) = \zeta u - \frac{\eta_1}{\omega} u,$$

qui ne diffère de ζ que par un terme linéaire en u choisi de telle façon que $Z(u)$ admette la période 2ω. On a, en effet,

$$Z(u+2\omega) - Z(u) = \zeta(u+2\omega) - \zeta u - 2\eta_1 = 0,$$
$$Z(u+2\omega) = Z(u);$$

puis

$$Z(u+2\omega') - Z(u) = \zeta(u+2\omega') - \zeta u - \frac{2\eta_1\omega'}{\omega},$$
$$Z(u+2\omega') = Z(u) - \frac{2}{\omega}(\eta_1\omega' - \omega\eta_1').$$

Dans la notation de M. Weierstrass les deux périodes jouent donc un rôle symétrique, tandis que dans celle de Jacobi une des périodes joue un rôle spécial.

Nous verrons plus loin que la constante $\eta\omega' - \omega\eta'$ n'est pas nulle; elle a pour valeur $\pm\frac{\pi i}{2}$ où il faut prendre le même signe que le signe du coefficient de i dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$.

Pour le moment nous poserons

$$\eta\omega' - \omega\eta' = \delta. \tag{20}$$

Alors $Z(u)$ vérifie les deux relations

$$\left\{\begin{aligned} Z(u+2\omega) &= Z(u),\\ Z(u+2\omega') &= Z(u) - \frac{2\delta}{\omega}. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

La fonction $Z(u)$, ne différant de ζu que par un terme linéaire en u, a les mêmes points singuliers et les mêmes parties principales.

Ainsi, cette fonction $Z(u)$ a pour pôles simples de résidus $+1$ tous les points $u = 0$, $u = 2m\omega + 2n\omega'$; il y a un de ces pôles dans chaque parallélogramme; ils sont tous homologues de l'origine $u = 0$ dans le réseau des parallélogrammes.

La fonction $Z(u-a)$ a pour pôles simples de résidu $+1$ les points $u = a$ et $u = a + 2m\omega + 2n\omega'$, homologues du point a dans le réseau des parallélogrammes. Par exemple, dans le voisinage de $u = a$, on a : $Z(u-a) - \frac{1}{u-a}$ égale fonction régulière.

Effet de l'addition des périodes à l'argument de σu et de $H(u)$. — Si l'on intègre de nouveau les formules (17) où $\zeta u = \frac{\sigma' u}{\sigma u}$, on a

$$\log\sigma(u+2\omega) = \log\sigma u + 2\eta u + \log c,$$
$$\log\sigma(u+2\omega') = \log\sigma u + 2\eta' u + \log c',$$

$\log c$ et $\log c'$ désignant des constantes d'intégration. En passant des logarithmes aux nombres, il vient

$$\sigma(u+2\omega) = c e^{2\eta u}\sigma u,$$
$$\sigma(u+2\omega') = c' e^{2\eta' u}\sigma u.$$

Dans la première de ces formules faisons $u = -\omega$ et rappelons-nous que, σu étant impaire, on a $\sigma(-\omega) = -\sigma\omega$. Nous trouverons

$$ce^{-2\eta\omega} = -1, \qquad c = -e^{2\eta\omega}.$$

La seconde relation donne de même

$$c' = -e^{2\eta'\omega'}.$$

La fonction σ vérifie donc les deux relations

$$(22) \qquad \begin{cases} \sigma(u+2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)}\sigma u, \\ \sigma(u+2\omega') = -e^{2\eta'(u+\omega')}\sigma u. \end{cases}$$

On conclut de là, par l'application répétée de ces formules, la valeur de $\sigma(u + 2m\omega + 2n\omega')$ en fonction de σu, m et n désignant des entiers positifs, négatifs ou nuls. Cherchons d'abord l'expression de $\sigma(u + 2\omega + 2\omega')$. Changeant, dans la seconde des formules ci-dessus, u en $u + 2\omega$ et tenant compte de la première, on a

$$\sigma(u+2\omega+2\omega') = e^{2(\eta+\eta')(u+\omega+\omega')+2(\eta\omega'-\omega\eta')}\sigma u.$$

Mais, comme $\eta\omega' - \omega\eta' = \pm\dfrac{\pi i}{2}$, on a

$$(23) \qquad \sigma(u+2\omega+2\omega') = -e^{2(\eta+\eta')(u+\omega+\omega')}\sigma u.$$

On vérifiera de même que, m et n étant deux entiers quelconques positifs ou négatifs, on a

$$(24) \quad \sigma(u+2m\omega+2n\omega') = (-1)^{mn+m+n}e^{2(m\eta+n\eta')(u+m\omega+n\omega')}\sigma u.$$

Dans la notation de Jacobi on remplace la fonction σ, dont la dérivée logarithmique est ζu, par une fonction $\mathrm{H}(u)$ (*héta de u*), également impaire, ayant pour dérivée logarithmique $\mathrm{Z}(u)$ (*zéta de u*)

$$\frac{\mathrm{H}'(u)}{\mathrm{H}(u)} = \mathrm{Z}(u) = \frac{\sigma' u}{\sigma u} - \frac{\eta}{\omega}u.$$

On a donc, en intégrant,

$$\log\mathrm{H}(u) = \log\sigma u - \frac{\eta}{2\omega}u^2 + \log\rho,$$

$\log\rho$ désignant une constante d'intégration, et, par suite,

$$(25) \qquad \mathrm{H}(u) = \rho e^{-\frac{\eta}{2\omega}u^2}\sigma u.$$

Pour déterminer ρ, divisons les deux membres de la relation (25) par u et faisons tendre u vers zéro; $\frac{\sigma u}{u}$ tend vers 1, $\frac{\mathrm{H}(u)}{u}$ vers la valeur $\mathrm{H}'(0)$ de la dérivée $\frac{d\mathrm{H}}{du}$ pour $u=0$. On a ainsi $\rho = \mathrm{H}'(0)$, et la formule (25) devient :

$$\frac{\mathrm{H}(u)}{\mathrm{H}'(0)} = e^{-\frac{\eta}{2\omega}u^2}\sigma u.$$

La fonction $\mathrm{H}(u)$ admet les mêmes zéros que σu. Elle vérifie les deux relations

$$(26)\qquad \begin{cases} \mathrm{H}(u+2\omega) = -\mathrm{H}(u), \\ \mathrm{H}(u+2\omega') = -e^{-\frac{2\delta}{\omega}(u+\omega')}\mathrm{H}(u), \end{cases}$$

où δ désigne comme plus haut la quantité $\eta\omega' - \omega\eta'$. Ces relations se tirent, soit des relations que vérifie σ, soit, par l'intégration, de celles que vérifie Z.

En effet, intégrant les relations (21), on a, puisque $\mathrm{Z}(u) = \frac{\mathrm{H}'(u)}{\mathrm{H}(u)}$,

$$\log \mathrm{H}(u+2\omega) = \log \mathrm{H}(u) + \log c,$$

$$\log \mathrm{H}(u+2\omega') = \log \mathrm{H}(u) - \frac{2\delta}{\omega}u + \log c',$$

où c et c' sont des constantes. On en déduit

$$\mathrm{H}(u+2\omega) = c\,\mathrm{H}(u),$$

$$\mathrm{H}(u+2\omega') = c'e^{-\frac{2\delta}{\omega}u}\mathrm{H}(u).$$

Faisant dans la première $u = -\omega$, on a, comme H est impaire, $c=-1$; de même, faisant dans la seconde $u=-\omega'$, on a $c' = -e^{-\frac{2\delta\omega'}{\omega}}$. On a bien ainsi les formules (26).

22. **Remarque.** — On a dès à présent des exemples de fonctions elliptiques. Ainsi la fonction $p\,u$, qui n'a que des pôles à distance finie et qui admet les deux périodes 2ω et $2\omega'$, est une *fonction elliptique;* il en est de même de ses dérivées $p'u$, $p''u$, ...

Les fonctions σ, H, ζ, Z ne sont pas elliptiques, car elles n'admettent pas les deux périodes 2ω et $2\omega'$.

Nous allons montrer comment, avec les seuls éléments analy-

tiques nouveaux que nous venons de définir et qui se déduisent tous de σu, on peut exprimer toutes les fonctions elliptiques.

23. **Cas de dégénérescence.** — Lorsqu'une des périodes 2ω ou $2\omega'$ devient infinie les fonctions σ et $\wp$ se réduisent à des fonctions connues. Supposons, par exemple ω', *infini* et prenons la fonction $\wp$. Dans la série qui définit $\wp u$, w est infini dans tous les termes où figure ω', c'est-à-dire où n est différent de zéro. Tous ces termes sont donc nuls et $\wp(u)$ se réduit à la fonction

$$\wp(u, \omega' = \infty) = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u - 2m\omega)^2} - \frac{1}{4m^2\omega^2}\right],$$

la somme Σ' étant étendue aux valeurs positives et négatives de l'entier m, zéro exclu. Comme la série $\sum' \frac{1}{m^2}$ est convergente et a pour somme $\frac{\pi^2}{3}$, on a

$$\wp(u, \omega' = \infty) = -\frac{\pi^2}{12\omega^2} + \frac{1}{u^2} + \sum{}' \frac{1}{(u - 2m\omega)^2}.$$

Mais alors, en comparant à la formule

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \frac{1}{z^2} + \sum{}' \frac{1}{(z - m\pi)^2},$$

on a

$$(27) \qquad \wp(u, \omega' = \infty) = -\frac{\pi^2}{12\omega^2} + \frac{\pi^2}{4\omega^2}\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi u}{2\omega}}.$$

En intégrant et changeant les signes, on a

$$(28) \qquad \zeta(u, \omega' = \infty) = \frac{\pi^2}{12\omega^2}u + \frac{\pi}{2\omega}\cot\frac{\pi u}{2\omega},$$

sans ajouter de constante, car ζ est impaire.

Enfin, intégrons de nouveau et passons des logarithmes aux nombres; il vient

$$\sigma(u, \omega' = \infty) = c e^{\frac{\pi^2}{24\omega^2}u^2} \sin\frac{\pi u}{2\omega},$$

où c est une constante d'intégration. Pour la déterminer, divisons par u et faisons tendre u vers zéro, en nous rappelant que $\frac{\sigma u}{u}$ tend

vers 1. On a alors $c^{\frac{\pi}{2\omega}} = 1$ et enfin

$$(29) \qquad \sigma(u, \omega' = \infty) = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\pi^2}{24\omega^2} u^2} \sin \frac{\pi u}{2\omega}.$$

On voit ainsi que l'analogie avec les fonctions trigonométriques devient l'identité quand une des périodes est infinie.

Supposons que les périodes soient infinies toutes les deux. Alors dans la série $\wp(u)$ tous les termes sont nuls, sauf le premier, et l'on a

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2};$$

intégrant et changeant les signes, on a

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{1}{u},$$

puis

$$\sigma u = u.$$

On voit, d'après cela, que la théorie que nous allons développer donnera, comme cas particuliers, les formules relatives aux fonctions trigonométriques ou aux fonctions rationnelles, suivant que l'on y supposera une période infinie ou les deux périodes infinies.

II. — Première expression des fonctions elliptiques. Décomposition en éléments simples. Conséquences.

24. **Cas des pôles simples.** — Soit $f(u)$ une fonction elliptique ayant les pôles a, b, c, ..., l dans un parallélogramme élémentaire P, ces pôles étant d'abord supposés simples et les résidus correspondants étant A, B, ..., L. Alors, dans le voisinage du point a, on a

$$f(u) = \frac{A}{u-a} + \text{fonction régulière},$$

dans le voisinage de b

$$f(u) = \frac{B}{u-b} + \text{fonction régulière},$$

. . . .

Formons la fonction

$$\Phi(u) = f(u) - A\,Z(u-a) - B\,Z(u-b) - \ldots - L\,Z(u-l).$$

Cette fonction est régulière dans le parallélogramme des périodes P, car dans le voisinage de $u = a$, par exemple, on a

$$f(u) = \frac{A}{u-a} + \text{fonction régulière},$$

$$Z(u-a) = \frac{1}{u-a} + \text{fonction régulière},$$

donc

$$f(u) - A\,Z(u-a) = \text{fonction régulière},$$

et, de plus, toutes les autres expressions $Z(u-b), \ldots, Z(u-l)$ sont régulières au point a.

D'ailleurs, $f(u)$ admettant les périodes 2ω et $2\omega'$, on a, d'après les propriétés de $Z(u)$ (éq. 21),

$$(30) \qquad \begin{cases} \Phi(u+2\omega) = \Phi(u), \\ \Phi(u+2\omega') = \Phi(u) - \dfrac{2\delta}{\omega}(A + B + \ldots + L). \end{cases}$$

D'après ces équations, la fonction $\Phi(u)$ est régulière *dans tout le plan* à distance finie, car elle est régulière dans le parallélogramme P, et, dans les autres parallélogrammes, elle prend des valeurs qui ne diffèrent que par une constante de celles qu'elle prend dans P.

Nous allons démontrer que $\Phi(u)$ se réduit nécessairement à une *constante*. En effet, la dérivée $\Phi'(u)$ est régulière dans tout le parallélogramme P, car la dérivée d'une fonction régulière est une fonction régulière; de plus elle admet évidemment les deux périodes 2ω et $2\omega'$, comme on le voit en différentiant les formules (30).

Cette dérivée $\Phi'(u)$ est donc constante, comme étant une fonction régulière avec deux périodes (n° 19)

$$\Phi'(u) = C_1;$$

donc

$$\Phi(u) = C_1 u + C_0,$$

C_1 et C_0 désignant deux constantes. Mais, comme $\Phi(u+2\omega)$ doit être égal à $\Phi(u)$, C_1 doit être nul et $\Phi(u)$ se réduit à une constante C_0. Ainsi la différence appelée $\Phi(u)$ est constante. On a donc la formule

$$(31) \qquad f(u) = C_0 + A\,Z(\zeta - a) + B\,Z(\zeta - b) + \ldots + L\,Z(\zeta - l),$$

due à M. Hermite et appelée *formule de décomposition en éléments simples*. Cette formule est analogue à la formule de décomposition d'une fraction rationnelle en fractions simples.

25. **La somme des résidus d'une fonction elliptique en tous les pôles situés dans un parallélogramme des périodes est nulle.** — En effet, nous venons d'appeler A, B, ..., L les résidus relatifs aux pôles situés dans un parallélogramme des périodes; nous avons trouvé que $\Phi(u)$ est une *constante* : alors on a évidemment $\Phi(u+2\omega')-\Phi(u)=0$. On a donc d'après la deuxième formule (30), puisque δ est différent de zéro,

$$A+B+\ldots+L=0. \tag{32}$$

Le théorème est donc démontré.

Ainsi, toute fonction elliptique n'ayant que des pôles simples peut se mettre sous la forme (31), où les constantes A, B, ..., L ont une somme nulle.

Inversement toute fonction définie par une expression de la forme (31), où les constantes A, B, ..., L ont une somme nulle, est une fonction elliptique : en effet, cette fonction n'a d'autres singularités à distance finie que des pôles simples et, d'après les propriétés de la fonction Z, on a

$$f(u+2\omega)-f(u)=0,$$
$$f(u+2\omega')-f(u)=-\frac{2\delta}{\omega}(A+B+\ldots+L)=0.$$

26. **Formule de décomposition en éléments simples dans le cas où certains pôles sont multiples.** — Nous avons, pour plus de simplicité, supposé d'abord que la fonction elliptique considérée n'avait dans un parallélogramme élémentaire que des pôles simples. Le cas où la fonction posséderait des pôles multiples peut être regardé comme un cas limite du précédent : il suffit de supposer que plusieurs des pôles simples viennent à coïncider.

Mais nous traiterons ce cas directement, par la même méthode que le précédent. Nous obtiendrons ainsi l'expression la plus générale des fonctions elliptiques et cela encore avec le seul élément analytique $Z(u)$ et ses dérivées.

Soient a, b, ..., l les pôles de la fonction $f(u)$ dans un parallélogramme élémentaire et

$$\varphi_1(u) = \frac{A}{u-a} + \frac{A_1}{(u-a)^2} + \frac{A_2}{(u-a)^3} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{(u-a)^\alpha},$$

$$\varphi_2(u) = \frac{B}{u-b} + \frac{B_1}{(u-b)^2} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{(u-b)^\beta},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

les parties principales correspondantes. La différence

$$\begin{aligned}\Phi(u) = f(u) - \Big[& A\,Z(u-a) - A_1 Z'(u-a) + \frac{A_2}{1.2} Z''(u-a) + \ldots \\ & + (-1)^{\alpha-1} \frac{A_{\alpha-1}}{1.2\ldots\alpha-1} Z^{(\alpha-1)}(u-a)\Big] \\ - \Big[& B\,Z(u-b) - B_1 Z'(u-b) + \frac{B_2}{1.2} Z''(u-b) + \ldots \\ & + (-1)^{\beta-1} \frac{B_{\beta-1}}{1.2\ldots\beta-1} Z^{(\beta-1)}(u-b)\Big] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

est encore une constante; en effet, dans le voisinage de $u = a$ par exemple, on a

$$Z(u-a) = \frac{1}{u-a} + \text{fonction régulière},$$

$$Z'(u-a) = -\frac{1}{(u-a)^2} + \text{fonction régulière},$$

$$Z''(u-a) = \frac{1.2}{(u-a)^3} + \text{fonction régulière},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Z^{(\alpha-1)}(u-a) = (-1)^{\alpha-1} \frac{1.2\ldots(\alpha-1)}{(u-a)^\alpha} + \text{fonction régulière}.$$

Donc

$$\begin{aligned} & A\,Z(u-a) - A_1 Z'(u-a) + \frac{A_2}{1.2} Z''(u-a) + \ldots \\ & + \frac{(-1)^{\alpha-1}}{1.2\ldots\alpha-1} Z^{(\alpha-1)}(u-a) = \varphi_1(u) + \text{fonction régulière}.\end{aligned}$$

Comme dans le voisinage de $u = a$, on a aussi, par hypothèse,

$$f(u) = \varphi_1(u) + \text{fonction régulière},$$

on voit que $\Phi(u)$ est régulière au point a; il en est de même des

autres pôles. D'ailleurs on a, d'après les propriétés des fonctions Z,

$$\Phi(u+2\omega) = \Phi(u),$$
$$\Phi(u+2\omega') = \Phi(u) - \frac{2\delta}{\omega}(A+B+\ldots+L),$$

car les fonctions $Z'(u)$, $Z''(u)$ sont doublement périodiques. On verra, comme plus haut, que la fonction régulière Φ est constante et que, par suite, *la somme des résidus* $A+B+\ldots+L$ *est nulle.* L'expression générale d'une fonction elliptique est donc

$$(33)\quad \left\{ \begin{aligned} f(u) = C_0 + \sum \Big[& AZ(u-a) - A_1 Z'(u-a) \\ & + \frac{A_2}{1.2} Z''(u-a) + \ldots \\ & + (-1)^{\alpha-1} \frac{A_{\alpha-1}}{1.2\ldots\alpha-1} Z^{(\alpha-1)}(u-a) \Big], \end{aligned} \right.$$

la somme Σ étant étendue à tous les pôles situés dans un parallélogramme, avec la condition

$$(32)\quad A+B+\ldots+L = 0.$$

Ainsi, de même que toute fonction rationnelle est une combinaison linéaire à coefficients constants de termes de la forme

$$\frac{1}{u-a}, \quad \frac{1}{(u-a)^2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{(u-a)^\alpha},$$

avec la convention que $u - \infty = \frac{1}{u}$, toute fonction elliptique est, à une constante additive près, une combinaison linéaire, à coefficients constants de termes de la forme

$$Z(u-a), \quad Z'(u-a), \quad \ldots, \quad Z^{(\alpha-1)}(u-a),$$

avec la condition que la somme des résidus [coefficients des termes tels que $Z(u-a)$] est *nulle.*

Inversement toute fonction $f(u)$, définie par une expression de la forme (33), où

$$A+B+\ldots+L = 0,$$

est une *fonction elliptique,* car on vérifie immédiatement les relations

$$f(u+2\omega) - f(u) = 0,$$
$$f(u+2\omega') - f(u) = -\frac{2\delta}{\omega}(A+B+\ldots+L) = 0.$$

27. **Formule de décomposition en éléments simples avec les notations de M. Weierstrass.** — La formule (33) que nous venons d'établir peut s'écrire comme il suit. Nous avons posé

$$Z(u) = \zeta u - \frac{\eta}{\omega} u.$$

Donc, en différentiant et se reportant à la définition de pu comme la dérivée changée de signe de $\frac{\sigma'}{\sigma}$

$$Z'(u) = -pu - \frac{\eta}{\omega},$$
$$Z''(u) = -p'u,$$
$$\dots\dots\dots\dots,$$
$$Z^{(\alpha-1)}(u) = -p^{(\alpha-2)}u.$$

Faisant ce changement de notations, on a la formule

$$(34)\quad \begin{cases} f(u) = D_0 + \sum \Big[A\zeta(u-a) + A_1 p(u-a) - \frac{A_2}{1.2} p'(u-a) - \dots \\ \qquad + (-1)^{\alpha-2} \frac{A_{\alpha-1}}{1.2\dots(\alpha-1)} p^{(\alpha-2)}(u-a) \Big], \end{cases}$$

où D_0 désigne une nouvelle constante et où la somme Σ est encore étendue à tous les pôles situés dans un même parallélogramme des périodes. Les termes linéaires en u qui semblent s'introduire quand on remplace $Z(u)$ par $\zeta u - \frac{\eta}{\omega} u$, disparaissent, car leur coefficient est $-\frac{\eta}{\omega}(A + B + \dots + L)$, c'est-à-dire o.

28. **Remarques.** — Dans ces formules de décomposition nous avons supposé les pôles $a, b, \dots, l$ situés dans un même parallélogramme. Cette restriction est *inutile* en ce sens qu'on peut toujours remplacer chacun des pôles par un point homologue. Ainsi soit

$$a' = a + 2m\omega + 2n\omega'$$

un point homologue de a, on a

$$Z(u-a) = Z(u - a' + 2m\omega + 2n\omega'),$$
$$= Z(u-a') - n\frac{2\delta}{\omega}.$$

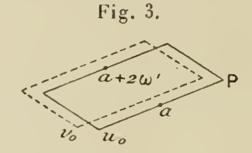
Remplaçant $Z(u-a)$ par cette valeur, on voit que la formule reste la même. La seule valeur de la constante C_0 est modifiée.

Une autre remarque est celle-ci. Quand on fait choix d'un parallélogramme élémentaire P de sommets

$$u_0, \quad u_0 + 2\omega, \quad u_0 + 2\omega', \quad u_0 + 2\omega + 2\omega',$$

il peut arriver qu'il y ait des pôles tels que a, par exemple, sur un côté et, par suite, d'autres pôles tels que $a + 2\omega'$ sur le côté opposé. On peut être embarrassé pour savoir quels sont ceux de ces pôles qu'il faut regarder comme étant dans le parallélogramme. Alors on remplacera le parallélogramme P par un autre tracé en

Fig. 3.



pointillé, obtenu en déplaçant infiniment peu le point u_0 en v_0 de façon à éviter qu'il y ait des pôles sur les côtés. La même remarque sera utile plus loin pour le cas où il y aurait des zéros sur des côtés.

29. **Règle pratique pour la décomposition d'une fonction elliptique $f(u)$ en éléments simples.** — Il faut tout d'abord déterminer les pôles de cette fonction dans un parallélogramme des périodes, arbitrairement choisi d'ailleurs; soient $a, b, \ldots, l$ ces points.

Il faut ensuite déterminer la partie principale de $f(u)$ relative à chacun de ces pôles. Supposons, par exemple, que le pôle $u=a$ soit d'ordre α : alors le produit

$$\psi(u) = (u-a)^\alpha f(u)$$

est régulier et différent de zéro pour $u=a$. Si donc on développe ce produit, par la formule de Taylor, dans le voisinage de $u=a$,

$$\begin{aligned}\psi(u) = A_{\alpha-1} + A_{\alpha-2}(u-a) + A_{\alpha-3}(u-a)^2 + \ldots \\ + A(u-a)^{\alpha-1} + (u-\alpha)^\alpha g(u),\end{aligned}$$

$g(u)$ étant une série entière en $(u-a)$, on a, en égalant ce dé-

veloppement à $(u-a)^\alpha f(u)$ et divisant par $(u-a)^\alpha$, le développement

$$f(u)=\frac{A_{\alpha-1}}{(u-a)^\alpha}+\frac{A_{\alpha-2}}{(u-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_1}{(u-a)^2}+\frac{A}{u-a}+g(u),$$

qui met en évidence la partie principale cherchée. On peut alors écrire la formule de décomposition, quand on a fait ce calcul pour chacun des pôles situés dans le parallélogramme choisi. D'après une remarque que nous avons faite, on peut, dans ces calculs comme dans la formule finale de décomposition, remplacer chacun des pôles tels que a par un point homologue $a+2m\omega+2n\omega'$.

La principale difficulté pour la décomposition en éléments simples est la détermination des pôles $a, b, \ldots, l$, de même que pour la décomposition d'une fraction rationnelle, la principale difficulté est de trouver les racines du dénominateur. Nous reviendrons sur ce point au n° 50.

30. **Il ne peut pas exister de fonctions elliptiques ayant dans un parallélogramme un seul pôle, si ce pôle est du premier ordre.** — En effet, si la fonction $f(u)$ n'avait qu'un pôle simple a de résidu A, la formule précédente (31) donnant $f(u)$ ne contiendrait qu'un terme $AZ(u-a)$. Mais la somme des résidus étant nulle, on aurait $A=0$ et $f(u)=C_0$. La fonction serait donc une constante et n'aurait pas de pôle.

Mais il existe des fonctions elliptiques ayant dans un parallélogramme deux pôles seulement, *simples tous deux*, $u=a$ et $u=b$. En effet, dans cette hypothèse, la formule (31) comprend deux termes et l'on a $A+B=0$; la fonction $f(u)$ est alors

$$f(u)=C_0+A[Z(u-a)-Z(u-b)].$$

Il existe aussi des fonctions elliptiques ayant dans un parallélogramme élémentaire un seul pôle, pourvu qu'il soit d'ordre supérieur au premier; le résidu relatif à ce pôle est *nul*. C'est ce qui a lieu, par exemple, pour pu qui admet l'origine et les points homologues comme pôles doubles de résidus nuls.

D'une manière générale, les dérivées et les puissances positives de pu sont des fonctions elliptiques ayant dans chaque parallélo-

gramme un seul pôle homologue du point $u = 0$; ce pôle est d'ordre supérieur à 1 et le résidu correspondant est nul.

31. **Exemple. Décomposition de $p^2 u$ en éléments simples.** — La série qui définit pu montre que, dans le voisinage de $u = 0$, on a

$$pu = \frac{1}{u^2} + G(u),$$

$G(u)$ étant une fonction régulière au point o définie par la série

(35) $$G(u) = \sum{}' \left[\frac{1}{(u - w)^2} - \frac{1}{w^2}\right].$$

Comme $G(u)$ est paire et s'annule manifestement pour $u = 0$, on a, en développant cette fonction en série de puissances dans le voisinage de $u = 0$,

$$G(u) = \frac{g_2}{20} u^2 + \frac{g_3}{28} u^4 + \ldots,$$

où, conformément aux notations de M. Weierstrass, nous appelons $\frac{g_2}{20}$ et $\frac{g_3}{28}$ les deux premiers coefficients

(36) $$\frac{g_2}{20} = 3 \sum{}' \frac{1}{w^4}, \qquad \frac{g_3}{28} = 5 \sum{}' \frac{1}{w^6}.$$

Ces expressions de g_2 et g_3 s'obtiennent immédiatement en développant chaque terme de la série (35) suivant les puissances ascendantes de u, par la formule

$$\frac{1}{(u - w)^2} = \frac{1}{w^2} + \frac{2u}{w^3} + \frac{3u^2}{w^4} + \frac{4u^3}{w^5} + \frac{5u^4}{w^6} + \ldots,$$

puis en ordonnant la somme par rapport aux puissances ascendantes de u.

On a donc, dans le voisinage de $u = 0$,

(37) $$pu = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20} u^2 + \frac{g_3}{28} u^4 + \ldots,$$

et en élevant au carré

$$p^2 u = \frac{1}{u^4} + \frac{g_2}{10} + \frac{g_3}{14} u^2 + \ldots.$$

Considérons un parallélogramme des périodes entourant le

point $u = 0$; dans ce parallélogramme $p^2 u$ a, comme seul pôle, $u = 0$; ce pôle est d'ordre 4 et la partie principale correspondante est $\frac{1}{u^4}$, d'après le développement ci-dessus. Dans la formule de décomposition en éléments simples (34) il faudrait donc prendre un seul pôle $a = 0$, puis $\alpha = 4$, $A = A_1 = A_2 = 0$, $A_3 = 1$. On a alors

(38) $$p^2 u = D_0 + \frac{1}{6} p'' u,$$

D_0 désignant une constante.

Il est d'ailleurs aisé de vérifier directement cette formule. D'après le développement de pu on a, en différentiant,

$$p' u = -\frac{2}{u^3} + \frac{g_2}{10} u + \frac{g_3}{7} u^3 + \ldots,$$

$$p'' u = \frac{6}{u^4} + \frac{g_2}{10} + \frac{3 g_3}{7} u^2 + \ldots.$$

Donc la différence

$$\Phi(u) = p^2 u - \frac{1}{6} p'' u$$

est régulière au point $u = 0$, car, dans le second membre les termes en $\frac{1}{u}$ disparaissent. La fonction $\Phi(u)$ est donc *régulière* dans tout le parallélogramme élémentaire considéré (contenant l'origine), et, comme elle admet les deux périodes 2ω et $2\omega'$, elle est égale à une *constante* D_0.

La formule (38) est ainsi vérifiée. Pour déterminer la constante, on donnera à u une valeur particulière. D'après les développements de p^2 et de p'', on a, dans le voisinage de $u = 0$,

$$D_0 = p^2 u - \frac{1}{6} p'' u = \frac{g_2}{12} + \ldots,$$

d'où en faisant $u = 0$, $D_0 = \frac{g_2}{12}$. On a ainsi la formule

(39) $$p^2 u = \frac{1}{6} p'' u + \frac{g_2}{12}.$$

On formera de même, à titre d'exercice, les expressions de $p^3 u$, $p^4 u$, ... en fonctions linéaires de p, p', p'', ... par la for-

mule de décomposition en éléments simples. Ces expressions se tirent aussi des formules obtenues en différentiant la relation (39) un nombre quelconque de fois et tenant compte de la relation que nous allons établir entre p et p'.

32. **Relation algébrique entre** pu **et sa dérivée** $p'u$. — Multiplions les deux membres de la relation (39) par $p'u$ et intégrons par rapport à u, nous obtiendrons une formule qu'on peut écrire

$$p'^2 = 4p^3 - g_2 p + C,$$

où C désigne une constante.

Pour déterminer cette constante, on remplacera encore p, p' par leurs développements en série donnés plus haut : on vérifiera que les termes en $\frac{1}{u}$ disparaissent, et en faisant ensuite $u = 0$, on trouvera $C = -g_3$. On a donc la relation

$$p'^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3, \tag{40}$$

algébrique en p et p'.

Cette formule donne la dérivée de la fonction inverse de pu. Faisons

$$p(u) = z,$$

d'où l'on tire, en imaginant l'équation résolue par rapport à u,

$$u = \arg p\, z,$$

c'est-à-dire u égale l'argument dont le p est z. La formule (40) donne alors

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3,$$

$$\frac{du}{dz} = \pm \frac{1}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}.$$

La dérivée de u par rapport à z est donc algébrique en z, tout comme la dérivée de arc sin z.

Comme z est infini quand u est nul, on a

$$u = \pm \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}, \tag{41}$$

formule permettant de calculer u en fonction de z.

33. **Développements en séries de puissances de pu, ζu, σu.** — Les constantes g_2 et g_3 s'appellent les *deux invariants*. Ces constantes étant connues, on a, comme il suit, les développements en séries de p, ζ, σ.

Faisons, dans le voisinage de $u = 0$,

$$(42) \qquad pu = \frac{1}{u^2} + \star + c_2 u^2 + c_3 u^4 + \ldots + c_\lambda u^{2\lambda-2} + \ldots.$$

Les deux premiers coefficients sont

$$(43) \qquad c_2 = \frac{g_2}{2^2.5}, \qquad c_3 = \frac{g_3}{2^2.7},$$

Les suivants se calculent facilement par voie récurrente en substituant le développement de p dans l'équation

$$p^2 u = \frac{1}{6} p'' u + \frac{g_2}{12},$$

et identifiant les deux membres. On trouve ainsi, pour λ plus grand que 3, la formule récurrente

$$(44) \qquad c_\lambda = \frac{3}{(2\lambda+1)(\lambda-3)} \sum_\nu c_\nu c_{\lambda-\nu} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, \lambda - 2),$$

qui montre que tous les coefficients sont des polynomes en g_2 et g_3. Ainsi

$$(45) \qquad c_4 = \frac{g_2^2}{2^4.3.5^2}, \qquad c_5 = \frac{3 g_2 g_3}{2^4.5.7.11}.$$

Le développement de ζu pour de petites valeurs de u se tire immédiatement du précédent par une intégration, puisque $\zeta u = -\int pu\, du$; on a donc

$$(46) \qquad \zeta u = \frac{1}{u} + \star - \frac{1}{3} c_2 u^3 - \frac{1}{5} c_3 u^5 + \ldots,$$

sans ajouter de constante, car ζu est une fonction impaire. Les coefficients de ce développement sont aussi des polynomes en g_2 et g_3.

Les deux développements de p et ζ convergent dans le cercle ayant pour centre l'origine et ne contenant dans son intérieur aucun point homologue de l'origine.

Du développement de ζ on déduit celui de σ puisque

$$\frac{\sigma' u}{\sigma u} = \zeta u.$$

Intégrant et passant des logarithmes aux nombres, on a

$$\sigma u = u e^{-\frac{c_2 u^4}{12} - \frac{c_3 u^6}{30} + \dots},$$

sans mettre de constante en facteur, car $\frac{\sigma u}{u}$ tend vers 1 quand u tend vers zéro. Il ne reste plus qu'à développer l'exponentielle en série et l'on a le développement de σu. On voit que les coefficients de ce développement sont aussi des polynomes entiers en g_2 et g_3. Voici les premiers termes du développement

$$(47) \quad \sigma u = u + \star - \frac{g_2 u^5}{2^4.3.5} - \frac{g_3 u^7}{2^3.3.5.7} - \frac{g_2^2 u^9}{2^9.3^2.5.7} - \frac{g_2 g_3 u^{11}}{2^7.3^2.5^2.7.11} - \dots$$

On trouvera ce développement poussé jusqu'à u^{35} dans les feuilles de M. Schwarz (*Formules et propositions pour l'emploi des fonctions elliptiques*). Puisque σu est une fonction entière comme $\sin u$, régulière dans tout le plan, ce développement de σu est convergent pour toutes les valeurs de u. Ce développement est commode pour le calcul des valeurs numériques de σu, $\sigma' u$, $\sigma'' u$ et, par suite, de ζ et p qui s'expriment rationnellement à l'aide des dérivées de σ

$$\zeta u = \frac{\sigma' u}{\sigma u}, \qquad p u = -\zeta' u = \frac{\sigma'^2 u - \sigma u \sigma'' u}{\sigma^2 u}.$$

34. **Inversion dans les notations de M. Weierstrass.** — D'après ces propriétés, si l'on a une équation de la forme

$$(48) \qquad u = \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4 z^3 - g_2 z - g_3}},$$

où g_2 et g_3 sont des constantes données, on en conclut

$$z = p u = \frac{\sigma'^2 u - \sigma u \sigma'' u}{\sigma^2 u},$$

z est donc exprimé en fonction uniforme de u, et l'on peut, à l'aide des séries précédentes, calculer la valeur de z correspondant à une

valeur de u; mais ces séries ont le défaut de ne mettre aucune périodicité en évidence. On a ainsi une solution du problème de l'inversion de l'intégrale (48). Les constantes g_2 et g_3 peuvent avoir des valeurs quelconques, car l'équation

$$p'^2 u = 4p^3 u - g_2 p u - g_3$$

est vérifiée identiquement par les développements en série ci-dessus, quels que soient g_2 et g_3.

Nous verrons plus loin comment, g_2 et g_3 étant donnés, on peut calculer un couple de périodes 2ω et $2\omega'$.

35. **Intégration d'une fonction elliptique.** — Pour calculer l'intégrale

$$\int f(u)\,du$$

d'une fonction elliptique $f(u)$, on fait comme pour les fonctions rationnelles : on décompose $f(u)$ en éléments simples et l'on intègre terme à terme. Ainsi, dans les notations de M. Weierstrass, $f(u)$ peut se mettre sous la forme (34). En intégrant, on a

$$\int f(u)\,du = \text{const.} + D_0 u + \sum \Bigg[A \log \sigma(u-a) - A_1 \zeta(u-a) - \frac{A_2}{1.2} p(u-a) + \ldots - (-1)^{\alpha-1} \frac{A_{\alpha-1}}{1.2\ldots\alpha-1} p^{(\alpha-3)}(u-a) \Bigg].$$

Par exemple, la formule de décomposition établie pour $p^2 u$ (n° 31) donne

$$\int p^2 u\,du = \frac{1}{6} p' u + \frac{g_2}{12} u + \text{const.} \tag{49}$$

36. **Homogénéité.** — Pour indiquer les valeurs des périodes ou des invariants, M. Weierstrass emploie les notations suivantes

$$\sigma u = \sigma(u \mid \omega, \omega') = \sigma(u; g_2, g_3),$$
$$p u = p(u \mid \omega, \omega') = p(u; g_2, g_3).$$

D'après le produit qui définit σu, il est évident que si l'on multiplie ω, ω' et u par un même facteur μ, $\frac{u}{w}$ ne change pas et

l'on a

$$(50)\qquad \sigma(\mu u \mid \mu\omega, \mu\omega') = \mu\,\sigma(u \mid \omega, \omega').$$

Différentiant par rapport à u, on a

$$(51)\qquad \sigma'(\mu u \mid \mu\omega, \mu\omega') = \sigma'(u \mid \omega, \omega').$$

Donc

$$(52)\qquad \zeta(\mu u \mid \mu\omega, \mu\omega') = \frac{1}{\mu}\zeta(u \mid \omega, \omega').$$

Différentiant encore par rapport à u

$$(53)\qquad p(\mu u \mid \mu\omega, \mu\omega') = \frac{1}{\mu^2}p(u \mid \omega, \omega'),$$

ce qu'on vérifie d'ailleurs immédiatement sur la série donnant p.

D'après les expressions de g_2 et g_3 par des séries doubles (n° 31)

$$g_2 = 2^2.3.5\sum{}' \frac{1}{w^4}, \qquad g_3 = 2^2.5.7\sum{}' \frac{1}{w^6},$$

quand on remplace ω et ω' par $\mu\omega$ et $\mu\omega'$, w est remplacé par μw et g_2 et g_3 par $\frac{g_2}{\mu^4}$ et $\frac{g_3}{\mu^6}$. On a donc aussi

$$(54)\qquad \begin{cases} \sigma\left(\mu u; \dfrac{g_2}{\mu^4}, \dfrac{g_3}{\mu^6}\right) = \mu\,\sigma(u; g_2, g_3), \\ p\left(\mu u; \dfrac{g_2}{\mu^4}, \dfrac{g_3}{\mu^6}\right) = \dfrac{1}{\mu^2}p(u; g_2, g_3). \end{cases}$$

L'expression $\frac{g_2^3}{g_3^2}$ est une fonction de ω et ω' qui ne change pas quand on multiplie ω et ω' par un même facteur arbitraire μ ; c'est une fonction du seul rapport des périodes.

37. **Cas de dégénérescence.** — Quand une des périodes est infinie, ω' par exemple, on a

$$g_2 = 2^2.3.5\sum{}' \frac{1}{2^4 m^4 \omega^4}, \qquad g_3 = 2^2.5.7\sum{}' \frac{1}{2^6 m^6 \omega^6},$$

et comme on a (n° 15)

$$\sum{}' \frac{1}{m^4} = \frac{\pi^4}{3^2.5}, \qquad \sum{}' \frac{1}{m^6} = \frac{2\pi^6}{3^3.5.7},$$

il vient

$$g_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi^2}{2\omega^2}\right)^2, \qquad g_3 = \frac{1}{3^3}\left(\frac{\pi^2}{2\omega^2}\right)^3.$$

Donc on a, dans ce cas,

$$g_2^3 - 27 g_3^2 = 0.$$

Le polynome $4z^3 - g_2 z - g_3$ a alors une racine double, et l'intégrale

$$u = \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$$

peut s'exprimer par des fonctions circulaires, comme il était prévu d'après les formules du n° 23. En calculant cette intégrale élémentaire, on retrouverait ainsi d'une autre manière les formules du n° 23 (*voyez* l'exercice 1, p. 62).

Quand les deux périodes ω et ω' sont infinies, on a $g_2 = g_3 = 0$ et le polynome sous le radical a une racine triple. L'intégrale devient alors

$$u = \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3}},$$

qui donne immédiatement

$$z = \frac{1}{u^2}.$$

III. — Deuxième forme des fonctions elliptiques. Décomposition en facteurs. Conséquences.

38. **Décomposition en facteurs.** — Nous allons indiquer maintenant une deuxième forme sous laquelle on peut mettre toute fonction elliptique $f(u)$ et qui est analogue à la forme d'une fraction rationnelle dont le numérateur et le dénominateur seraient décomposés en facteurs du premier degré.

Cette nouvelle forme résulte immédiatement des théorèmes précédents appliqués à la fonction $\frac{f'(u)}{f(u)}$.

Remarquons d'abord qu'une fonction elliptique a nécessairement un nombre limité de zéros dans un parallélogramme des périodes. Car, si elle en avait une infinité, il existerait à l'intérieur du parallélogramme au moins un point a dans le voisinage duquel

il y aurait une infinité de zéros; c'est ce qu'on verrait comme on l'a fait au n° 20 pour les pôles. Mais cela est impossible, car, la fonction $f(u)$ n'ayant à distance finie d'autres singularités que des pôles, ses zéros sont nécessairement isolés (n° 7).

Cela posé, soit une fonction elliptique $f(u)$ ayant, dans un parallélogramme des périodes, les pôles ou infinis simples a_1, a_2, ..., a_r au nombre de r et les zéros simples b_1, b_2, ..., b_s au nombre de s. La fonction $\frac{f'(u)}{f(u)}$ est une fonction elliptique régulière partout où $f(u)$ n'est ni nul ni infini. Un zéro simple de $f(u)$ est pour $\frac{f'(u)}{f(u)}$, un pôle simple de résidu 1, et un pôle simple de $f(u)$ est pour $\frac{f'(u)}{f(u)}$ un pôle simple de résidu -1 (n° 3).

On a donc, d'après la formule de décomposition en éléments simples,

$$(55)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{f'(u)}{f(u)} = c &+ \frac{\sigma'}{\sigma}(u-b_1) + \frac{\sigma'}{\sigma}(u-b_2) + \ldots + \frac{\sigma'}{\sigma}(u-b_s) \\ &- \frac{\sigma'}{\sigma}(u-a_1) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u-a_2) - \ldots - \frac{\sigma'}{\sigma}(u-a_r), \end{aligned}\right.$$

où $\frac{\sigma'}{\sigma}$ est la fonction ζ. En outre, la somme des résidus de $\frac{f'(u)}{f(u)}$ relatifs à tous les pôles devant être *nulle*, on a

$$s - r = 0.$$

Donc : *Dans un parallélogramme élémentaire le nombre des zéros d'une fonction elliptique est égal au nombre des infinis.* Ce nombre se nomme *ordre de la fonction elliptique;* nous reviendrons plus loin sur cette définition de l'ordre.

D'après ce théorème, faisons $s = r$ dans la formule (55) et intégrons terme à terme, puis passons des logarithmes aux nombres; nous aurons la formule cherchée

$$(56)\qquad f(u) = ae^{cu}\frac{\sigma(u-b_1)\,\sigma(u-b_2)\ldots\sigma(u-b_r)}{\sigma(u-a_1)\,\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_r)},$$

où a est une nouvelle constante. Cette formule met en évidence les zéros et les infinis de $f(u)$.

Si la fonction $f(u)$ a des zéros ou des pôles multiples, la même

formule s'applique; il suffit de supposer que plusieurs des points $b_1, b_2, \ldots$ sont confondus en un seul, ou plusieurs des points a_1, $a_2, \ldots$.

Dans la démonstration nous avons supposé que les points a_1, $a_2, \ldots, a_r$; $b_1, b_2, \ldots, b_r$ sont situés dans un même parallélogramme. En modifiant convenablement les valeurs des constantes c et a on peut remplacer un ou plusieurs points a_ν ou b_ν par des points homologues. Par exemple, considérons le point

$$a'_1 = a_1 + 2\omega,$$

homologue de a_1. En remplaçant dans la formule (22) a_1 par $a'_1 - 2\omega$, on a

$$\sigma(u - a_1) = \sigma(u - a'_1 + 2\omega) = -e^{2\eta(u - a'_1 + \omega)}\,\sigma(u - a'_1),$$

et, par suite

$$f(u) = a' e^{c'u} \frac{\sigma(u - b_1)\,\sigma(u - b_2)\ldots\sigma(u - b_r)}{\sigma(u - a'_1)\,\sigma(u - a_2)\ldots\sigma(u - a_r)},$$

avec

$$c' = c - 2\eta, \qquad a' = -ae^{2\eta(a'_1 - \omega)}.$$

39. **Théorème de Liouville.** — *Si l'on considère les zéros et les infinis d'une fonction elliptique situés dans un parallélogramme des périodes, la somme des zéros ne diffère de la somme des infinis que par des multiples des périodes.*

On démontre immédiatement ce théorème en écrivant que la fonction $f(u)$ sous la forme (56) admet les deux périodes 2ω et $2\omega'$. Comme on a

$$\sigma(u - \alpha + 2\omega) = -e^{2\eta(u - \alpha + \omega)}\,\sigma(u - \alpha),$$

on voit que le rapport $\dfrac{f(u + 2\omega)}{f(u)}$ est égal à

$$e^{2c\omega + 2\eta(a_1 + a_2 + \ldots + a_r - b_1 - b_2 - \ldots - b_r)}.$$

Ce rapport devant être l'unité, on a

$$(57) \qquad 2c\omega + 2\eta(a_1 + a_2 + \ldots + a_r - b_1 - b_2 - \ldots - b_r) = 2n\pi i,$$

où n est un entier. Écrivant de même que $\dfrac{f(u + 2\omega')}{f(u)} = 1$, on a

$$(57') \qquad 2c\omega' + 2\eta'(a_1 + a_2 + \ldots + a_r - b_1 - b_2 - \ldots - b_r) = -2m\pi i.$$

Éliminant c entre ces deux équations on a, en vertu de la relation $\eta_1\omega' - \omega\eta_1' = \frac{\pi i}{2}$ que nous établirons plus loin,

$$(58) \qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_r - b_1 - b_2 - \ldots - b_r = 2m\omega + 2n\omega';$$

ce qui *démontre le théorème.*

La valeur de la constante c est alors donnée par l'une ou l'autre des formules (57) ou (57').

Mais on peut simplifier un peu la formule en mettant à profit une remarque faite plus haut. Remplaçons le point a_1 par le point homologue

$$a'_1 = a_1 - 2m\omega - 2n\omega'.$$

La formule donnant $f(u)$ prendra la forme

$$f(u) = \mathrm{A}\,e^{\mathrm{C}u}\frac{\sigma(u-b_1)\,\sigma(u-b_2)\ldots\sigma(u-b_r)}{\sigma(u-a'_1)\,\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_r)},$$

où l'on a

$$(59) \qquad a'_1 + a_2 + \ldots + a_r = b_1 + b_2 + \ldots + b_r.$$

Mais alors, en exprimant que $f(u)$ admet les périodes 2ω et $2\omega'$, on a, par un calcul analogue à celui que nous venons de faire,

$$2\mathrm{C}\omega = 2\mathrm{N}\pi i, \qquad 2\mathrm{C}\omega' = -2\mathrm{M}\pi i,$$

M et N désignant des entiers. On en conclut

$$\mathrm{C}(\mathrm{M}\omega + \mathrm{N}\omega') = 0.$$

Le facteur $\mathrm{M}\omega + \mathrm{N}\omega'$ ne peut pas être nul, car le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$ est imaginaire et ne peut pas être égal à $-\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}$. Donc

$$\mathrm{C} = 0.$$

On peut donc toujours mettre une fonction elliptique sous la forme

$$(60) \qquad f(u) = \mathrm{A}\frac{\sigma(u-b_1)\,\sigma(u-b_2)\ldots\sigma(u-b_r)}{\sigma(u-a'_1)\,\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_r)},$$

avec la condition (59). On pourrait de même remplacer d'autres zéros et infinis par des points homologues : la formule resterait la même pourvu que la somme des zéros choisis égale celle des infinis.

40. **Notations de Jacobi.** — La formule de décomposition en facteurs s'écrit comme il suit dans les notations de Jacobi. La fonction H de Jacobi est liée à la fonction σ par la relation

$$\mathrm{H}(u) = \mathrm{H}'(0)\, e^{-\frac{\eta_1}{2\omega}u^2}\, \sigma u,$$

d'où

$$\sigma u = \frac{1}{\mathrm{H}'(0)}\, e^{\frac{\eta_1}{2\omega}u^2}\, \mathrm{H}(u).$$

Remplaçant alors σu par cette expression dans la formule (60) et tenant compte de

$$a'_1 + a_2 + \ldots + a_r = b_1 + b_2 + \ldots + b_r,$$

il vient

$$(61) \qquad f(u) = \mathrm{A}' \frac{\mathrm{H}(u-b_1)\,\mathrm{H}(u-b_2)\ldots\mathrm{H}(u-b_r)}{\mathrm{H}(u-a'_1)\,\mathrm{H}(u-a_2)\ldots\mathrm{H}(u-a_r)},$$

A′ désignant une constante. On a donc, en définitive, la même formule fondamentale dans les deux systèmes de notations.

41. **Deux fonctions elliptiques ayant les mêmes zéros et les mêmes infinis ne diffèrent que par un facteur constant.** — Cela résulte des formules précédentes où le facteur A seul est arbitraire, une fois les zéros et les infinis donnés.

42. **Ordre d'une fonction elliptique.** — On appelle *ordre* d'une fonction elliptique le nombre de pôles qu'elle possède dans un parallélogramme élémentaire, chacun d'eux étant compté avec son degré de multiplicité. Ce nombre est aussi égal au nombre des zéros situés dans un parallélogramme (n° 38) :

Ainsi pu est du second ordre, $p'u$ du troisième.

La fonction elliptique $f(u)$ étant d'ordre r, la fonction $f(u) - \mathrm{C}$, où C est une constante quelconque, est aussi d'ordre r, car les pôles de $f(u)$ et $f(u) - \mathrm{C}$ sont évidemment les mêmes. La fonction $f(u) - \mathrm{C}$ a donc, dans un parallélogramme, r zéros quel que soit C. Ainsi l'équation

$$f(u) = \mathrm{C}$$

a toujours r racines dans un parallélogramme. La valeur *mi-*

nimum que puisse prendre r est 2, car d'après le théorème du nº 30 il n'existe pas de fonction elliptique du premier ordre.

Exemple. — La fonction pu est du second ordre. Dans un parallélogramme des périodes il existe deux valeurs de u telles que $pu = C$. L'une d'elles étant α, l'autre est homologue du point $-\alpha$, car pu est paire. Ces deux racines sont distinctes tant que les deux points α et $-\alpha$ ne sont pas homologues, c'est-à-dire tant que l'on n'a pas

$$\alpha = -\alpha + 2m\omega + 2n\omega',$$

$$\alpha = m\omega + n\omega',$$

et $C = p(m\omega + n\omega')$.

Si les entiers m et n sont pairs tous deux, cette valeur de C est infinie : effectivement, l'équation $pu = \infty$ a dans chaque parallélogramme une racine double.

Si un des entiers m ou n est impair, ou si tous deux le sont, C est fini : on trouve ainsi, à cause de la périodicité de p, trois valeurs différentes de C pour lesquelles l'équation $pu - C = 0$ a, dans chaque parallélogramme, une racine double. Ces valeurs sont les suivantes :

m impair, n pair, $C = p\omega$.
m pair, n impair, $C = p\omega'$.
m et n impairs, $C = p(\omega + \omega')$.

La racine double de $pu - C = 0$ est, dans le premier cas, congrue à ω, dans le second à ω', dans le troisième à $\omega + \omega'$. Ces trois valeurs annulent la dérivée $p'u$: les valeurs correspondantes de C sont les trois racines du polynome

$$4z^3 - g_2 z - g_3,$$

comme nous le montrons plus loin (nº 46).

IV. — Exemples de décomposition en facteurs et en éléments simples. Formule d'addition algébrique pour pu. Conséquences.

43. Décomposer en facteurs la fonction doublement périodique

$$f(u) = pu - pv,$$

où v est une constante. — Dans un parallélogramme des périodes

pu admet o comme infini double. Donc la fonction admet deux zéros dans un parallélogramme des périodes; on voit que ce sont les homologues des points $u = v$ et $u = -v$ puisque p est paire. On a donc

$$pu - pv = A\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u},$$

A désignant une constante.

Cette constante se détermine en multipliant les deux membres par u^2 et en faisant ensuite tendre u vers zéro. Il vient

$$1 = -A\,\sigma^2 v.$$

La décomposition est donc donnée par la formule

$$(62)\qquad pu - pv = -\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\,.\,\sigma^2 v}.$$

44. **Formule d'addition pour** ζu. — Si l'on prend les dérivées logarithmiques des deux membres de l'égalité précédente, par rapport à u, il vient

$$(63)\qquad \frac{p'u}{pu - pv} = \zeta(u+v) + \zeta(u-v) - 2\zeta u;$$

puis, en échangeant u et v,

$$(64)\qquad \frac{-p'v}{pu - pv} = \zeta(u+v) - \zeta(u-v) - 2\zeta v;$$

enfin, en ajoutant membre à membre les deux égalités précédentes,

$$(65)\qquad \frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'v}{pu - pv} = \zeta(u+v) - \zeta u - \zeta v,$$

formule que l'on obtiendrait également en décomposant en éléments simples les fonctions elliptiques de u qui figurent dans les premiers membres. La formule (65) peut être considérée comme une formule d'addition pour la fonction ζu : seulement ce n'est pas une formule d'addition *algébrique*, car $\zeta(u+v)$ n'est pas une fonction algébrique de ζu et ζv.

45. **Formule d'addition de la fonction** pu. — Si l'on différentie par rapport à u les deux membres de l'égalité précédente, on

trouve

$$(66)\qquad pu - p(u+v) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right);$$

c'est une formule d'addition algébrique pour pu. En y remplaçant, après la dérivation, $p''u$ par sa valeur $6p^2u - \frac{g_2}{2}$ (éq. 39), on obtient $p(u+v)$ en fonction *rationnelle* de pu, pv, $p'u$ et $p'v$. Si, ensuite, on y remplace $p'u$ et $p'v$ par leurs valeurs respectives en fonction de pu et pv

$$p'u = \sqrt{4p^3u - g_2 pu - g_3}, \qquad p'v = \sqrt{4p^3v - g_2 pv - g_3},$$

on obtient $p(u+v)$ en fonction *algébrique* de pu et pv.

Autre forme de la formule d'addition. — On a, en effectuant la différentiation (66),

$$pu - p(u+v) = \frac{1}{2}\frac{p''u}{pu - pv} - \frac{1}{2}\frac{(p'u - p'v)p'u}{(pu - pv)^2};$$

permutant u et v on a de même

$$pv - p(u+v) = -\frac{1}{2}\frac{p''v}{pu - pv} + \frac{1}{2}\frac{(p'u - p'v)p'v}{(pu - pv)^2}.$$

Ajoutons membre à membre et remarquons que

$$p''u - p''v = 6(p^2u - p^2v),$$

d'après l'équation (39), il vient

$$(67)\qquad p(u+v) = \frac{1}{4}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2 - pu - pv,$$

qui donne $p(u+v)$ par une formule où la symétrie, par rapport aux deux lettres u et v, est en évidence.

En différentiant par rapport à u et remplaçant $p''u$ par $6p^2u - \frac{1}{2}g_2$, on a de même une formule d'addition pour $p'(u+v)$, exprimant cette fonction en fonction rationnelle de pu, $p'u$, pv, $p'v$. Une nouvelle différentiation donnera une formule d'addition pour p''; etc.

46. **Décomposition de $p'u$ en facteurs.** — La fonction $p'u$ a,

dans un parallélogramme élémentaire, un pôle triple qui est le point $u=0$, ou un point homologue. Cette fonction est donc de troisième ordre. Elle a, dans un parallélogramme, trois zéros que nous allons déterminer. Pour cela, partons des relations

$$p'(u+2\omega)=p'u, \qquad p'(u+2\omega')=p'u,$$
$$p'(u+2\omega+2\omega')=p'u.$$

Faisant dans la première de ces formules $u=-\omega$, on a

$$p'(\omega)=p'(-\omega);$$

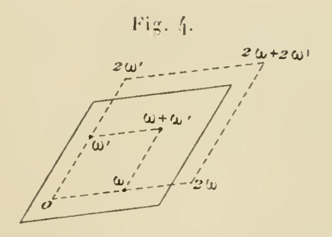
comme d'autre part p' est impaire,

$$p'(\omega)=-p'(-\omega),$$

Donc $p'(\omega)=0$. De même $p'(\omega')=0$.

Enfin, en faisant dans la troisième formule $u=-\omega-\omega'$, on voit que $p'(\omega+\omega')=0$. Prenons un parallélogramme élémentaire

Fig. 4.



très voisin de celui dont les sommets sont 0, 2ω, $2\omega'$, $2\omega+2\omega'$ et contenant o dans son intérieur. Alors, dans ce parallélogramme tracé en traits pleins, la fonction a le pôle triple o et trois zéros nécessairement simples ω, ω', $\omega+\omega'$. La somme des zéros $2\omega+2\omega'$ ne diffère de la somme des infinis qui est o que par des multiples de périodes.

Remplaçons le zéro $\omega+\omega'$ par son homologue $-\omega-\omega'$; alors la somme des trois zéros ω, ω', $-\omega-\omega'$ est égale à la somme des trois infinis qui est nulle et l'on a

$$p'u = A\,\frac{\sigma(u-\omega)\,\sigma(u-\omega')\,\sigma(u+\omega+\omega')}{\sigma^3 u}.$$

Pour déterminer A, on peut multiplier les deux membres par u^3

puis faire tendre u vers o. Comme dans le voisinage de o on a

$$p'u = -\frac{2}{u^3} + \text{fonction régulière},$$

le premier membre devient -2; comme $\frac{u}{\sigma u}$ tend vers 1, le second membre devient

$$A\,\sigma\omega\,\sigma\omega'\,\sigma(\omega+\omega')$$

et l'on a

$$p'u = -2\frac{\sigma(u-\omega)\,\sigma(u-\omega')\,\sigma(u+\omega+\omega')}{\sigma\omega\,\sigma\omega'\,\sigma(\omega+\omega')\,\sigma^3 u}.$$

Voici quelques conséquences des résultats précédents. Nous avons établi la relation

$$p'^2 u = 4p^3 u - g_2 pu - g_3.$$

Appelons e_1, e_2, e_3 les racines du polynome $4z^3 - g_2 z - g_3$, alors

(68) $$p'^2 u = 4(pu - e_1)(pu - e_2)(pu - e_3).$$

Comme $p'u$ s'annule pour $u = \omega$, $u = \omega + \omega'$, $u = \omega'$, les quantités e_1, e_2, e_3 sont égales à $p\omega$, $p(\omega + \omega')$, $p\omega'$,

(69) $$e_1 = p\omega, \qquad e_2 = p(\omega + \omega'), \qquad e_3 = p\omega'.$$

Il est évident, d'après la formule (68) qui donne $p'^2 u$, que le second membre de cette formule est le carré d'une fonction uniforme : nous vérifions plus loin (n° 48) que chacune des différences $pu - e_1$, $pu - e_2$, $pu - e_3$ est le carré d'une fonction uniforme.

47. **Effet de l'addition d'une demi-période à l'argument de pu.** — Dans la formule d'addition (67) faisons $v = \omega$, en remarquant que $p\omega = e_1$, $p'\omega = 0$ et en tenant compte de l'expression (68) de p'^2. Nous obtenons

$$p(u+\omega) - e_1 = \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{pu - e_1}.$$

De même, en faisant dans la formule d'addition $v = \omega + \omega'$ ou

$v = \omega'$, on trouve

$$p(u + \omega + \omega') - e_2 = \frac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}{pu - e_2},$$

$$p(u + \omega') - e_3 = \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{pu - e_3}.$$

18. Expressions de $pu - e_\lambda$. Fonctions $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. — Dans la formule (62) établie plus haut

$$pu - pv = -\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\, \sigma^2 v},$$

faisons $v = \omega$, nous aurons

$$pu - p\omega = -\frac{\sigma(u+\omega)\,\sigma(u-\omega)}{\sigma^2 u\, \sigma^2 \omega};$$

mais, d'après les propriétés de la fonction σ, on a

$$\sigma(u+\omega) = -e^{2\eta u}\,\sigma(u-\omega),$$

comme on le voit en changeant dans la première des formules (22) u en $u - \omega$. On a donc

$$(70) \qquad pu - p\omega = e^{2\eta u}\frac{\sigma^2(u-\omega)}{\sigma^2 u . \sigma^2\omega}.$$

On trouve de même

$$(70)' \qquad pu - p\omega' = e^{2\eta' u}\frac{\sigma^2(u-\omega')}{\sigma^2 u . \sigma^2\omega'}.$$

Enfin, dans la relation (62) faisons $v = \omega + \omega'$; il vient

$$pu - p(\omega+\omega') = -\frac{\sigma(u+\omega+\omega')\,\sigma(u-\omega-\omega')}{\sigma^2 u\, \sigma^2(\omega+\omega')},$$

ou d'après la formule (23), dans laquelle on change u en $u-\omega-\omega'$,

$$(71) \qquad pu - p(\omega+\omega') = e^{2(\eta+\eta')u}\frac{\sigma^2(u-\omega-\omega')}{\sigma^2 u\, \sigma^2(\omega+\omega')}.$$

Les trois différences considérées sont donc bien les carrés de fonctions uniformes. M. Weierstrass emploie une notation

spéciale pour désigner ces trois fonctions. Il fait

$$(72) \quad \begin{cases} \sigma_1 u = \dfrac{e^{\eta u}\,\sigma(\omega - u)}{\sigma\omega}, \\ \sigma_2 u = \dfrac{e^{(\eta+\eta')u}\,\sigma(\omega + \omega' - u)}{\sigma(\omega + \omega')}, \\ \sigma_3 u = \dfrac{e^{\eta' u}\,\sigma(\omega' - u)}{\sigma\omega'}. \end{cases}$$

Avec ces notations, on a

$$(73) \quad p u - e_1 = \left(\frac{\sigma_1 u}{\sigma u}\right)^2, \quad p u - e_2 = \left(\frac{\sigma_2 u}{\sigma u}\right)^2, \quad p u - e_3 = \left(\frac{\sigma_3 u}{\sigma u}\right)^2,$$

$$p'^2 u = 4\,\frac{(\sigma_1 u\, \sigma_2 u\, \sigma_3 u)^2}{\sigma^6 u},$$

$$(74) \quad p' u = -2\,\frac{\sigma_1 u\, \sigma_2 u\, \sigma_3 u}{\sigma^3 u};$$

le signe à prendre en extrayant la racine est —, comme on le voit en multipliant les deux membres par u^3 et faisant tendre u vers zéro. On retrouve ainsi, aux notations près, la formule établie directement dans le numéro précédent pour la décomposition de $p' u$ en facteurs.

49. **Toute fonction elliptique $f(u)$ aux périodes 2ω et $2\omega'$ est une fonction rationnelle de $p u$ et $p' u$.** — Nous établirons ce théorème comme une conséquence du théorème d'addition et de la formule de décomposition en éléments simples

$$f(u) = D_0 + \sum \Big[A\,\zeta(u-a) + A_1\, p(u-a) - \frac{A_2}{1.2}\, p'(u-a) - \ldots + (-1)^{\alpha-2} \frac{A_{\alpha-1}}{1.2\ldots(\alpha-1)}\, p^{(\alpha-2)}(u-a) \Big],$$

la somme étant étendue à tous les pôles. Tout d'abord la formule d'addition pour $p u$ (nº 45) montre que $p(u-a)$ est une fonction rationnelle de $p u$ et $p' u$. En différentiant cette formule on voit que $p'(u-a)$ est une fonction rationnelle de $p u$, $p' u$ et $p'' u$; mais, comme

$$p'' u = 6 p^2 u - \frac{g_2}{2},$$

$p'(u-a)$ est une fonction rationnelle de pu et $p'u$. On voit de même, en différentiant de proche en proche, que $p''(u-a)$, ..., $p^{(\alpha-2)}(u-a)$ sont des fonctions rationnelles de pu et $p'u$. Restent les termes tels que $\zeta(u-a)$. La formule d'addition pour la fonction ζ (n° 44) dans laquelle on remplace v par $-a$ donne

$$\zeta(u-a) = \zeta u - \zeta a + \frac{1}{2}\frac{p'u + p'a}{pu - pa};$$

on a de même $\zeta(u-b)$, ..., $\zeta(u-l)$. Si l'on porte ces valeurs dans la formule de décomposition en éléments simples, on voit que, dans la somme

$$(75) \qquad A\,\zeta(u-a) + B\,\zeta(u-b) + \ldots + L\,\zeta(u-l),$$

étendue à tous les pôles, le terme en ζu disparaît à cause de la relation $A + B + \ldots + L = 0$ et la somme (75) est une fonction rationnelle de pu et $p'u$.

Le théorème est donc démontré.

Remarque. — Comme on a

$$p'^2 u = 4p^3 u - g_2 pu - g_3,$$

on peut, dans une expression rationnelle en p et p', éliminer toutes les puissances de p' supérieures à la première en remplaçant toutes les puissances paires de p' par des polynomes en p. On met ainsi toute fonction rationnelle de p et p' sous la forme

$$\frac{P(p) + p'\,Q(p)}{P_1(p) + p'\,Q_1(p)},$$

où P, Q, P_1, Q_1 sont des polynomes entiers en p.

Multipliant et divisant cette expression par $P_1(p) - p'\,Q_1(p)$ et remplaçant p'^2 par sa valeur en fonction de p, on voit que toute fonction rationnelle de p et p', c'est-à-dire toute fonction elliptique peut se mettre sous la forme

$$f(u) = R(p) + p'\,R_1(p).$$

R et R_1 étant des fonctions rationnelles. Il en résulte

$$f(-u) = R(p) - p'\,R_1(p),$$

car p' est impair.

En particulier, si $f(u)$ est une fonction paire, $f(-u)$ doit être égal à $f(u)$ et $R_1(p)$ identiquement *nul*. Alors

$$f(u) = R(p).$$

Si $f(u)$ est impaire, $f(-u)$ doit être égal à $-f(u)$ et $R(p)$ identiquement nul. Alors

$$f(u) = p' R_1(p).$$

Ainsi une fonction elliptique paire est une fonction rationnelle de pu; et une fonction elliptique impaire est égale à une fonction rationnelle de pu multipliée par $p'u$.

Par exemple, $p(2u)$, $p(3u)$, ..., $p(nu)$ (n entier) s'expriment rationnellement en fonction de pu. On a ainsi des formules analogues à celles de la multiplication des arcs en Trigonométrie, que le lecteur établira sans peine par l'application répétée de la formule d'addition.

De même $p'(nu)$ est égal à $p'u$ multiplié par une fonction rationnelle de pu.

50. **Remarque sur l'intégration d'une fonction elliptique supposée mise sous la forme d'une fonction rationnelle de p et p'.** — Soit la fonction

$$f(u) = R(pu) + p'u\, R_1(pu),$$

où, comme précédemment, R et R_1 désignent des fonctions rationnelles de pu. On aura

$$\int f(u)\,du = \int R(pu)\,du + \int p'u\, R_1(pu)\,du.$$

La deuxième intégrale du second membre se ramène immédiatement à l'intégrale d'une fonction rationnelle, car si l'on fait $pu = z$ elle devient

$$\int R_1(z)\,dz:$$

on sait calculer cette intégrale. Pour obtenir la première intégrale du second membre, on commencera par décomposer la fonction rationnelle R de pu en fractions simples, en considérant pu

comme la variable

$$R(pu) = c_0 + c_1 pu + c_2 p^2 u + \ldots + c_\nu p^\nu u$$
$$+ \frac{A}{pu-\alpha} + \frac{A_1}{(pu-\alpha)^2} + \frac{A_2}{(pu-\alpha)^3} + \ldots + \frac{B}{pu-\beta} + \ldots,$$

$c_0, c_1, \ldots, c_\nu, A, A_1, A_2, \ldots, B, \ldots, \alpha, \beta, \ldots$ étant des constantes. L'intégrale de la partie entière en pu s'obtient aisément, car on sait (n° 31) exprimer $p^2 u$, $p^3 u$, ..., $p^\nu u$ en fonctions linéaires à coefficients constants de pu et de ses dérivées $p'u$, $p''u$, ..., de sorte que cette partie entière s'écrit

$$C_0 + C_1 pu + C_2 p'u + C_3 p''u + \ldots;$$

son intégrale est immédiatement

$$C_0 u - C_1 \zeta u + C_2 pu + C_3 p'u + \ldots.$$

Les intégrales des termes suivants s'obtiennent aussi en décomposant ces termes en éléments simples. Pour cela on détermine d'abord des constantes a, b, ... telles que

$$pa = \alpha, \qquad pb = \beta, \qquad \ldots.$$

Nous avons donné (n° 44, formule 64) la décomposition en éléments simples de $\frac{p'v}{pu - pv}$; nous écrirons cette formule

(76) $$\frac{1}{pu-pv} = \frac{1}{p'v}[\zeta(u-v) - \zeta(u+v) + 2\zeta v].$$

On en conclut, en changeant v en a,

$$\int \frac{du}{pu-pa} = \frac{1}{p'a}\left[\log\frac{\sigma(u-a)}{\sigma(u+a)} + 2u\zeta a\right] + \text{const.}$$

Différentiant ensuite la formule (76) par rapport à v et divisant par $p'v$, on en tire la formule de décomposition en éléments simples pour $\frac{1}{(pu-pv)^2}$; différentiant cette nouvelle formule par rapport à v on en tire de même la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{(pu-pv)^3}$, ... et ainsi de suite. Dans ces formules on fera $v = a$ et l'on en déduira immédiatement les intégrales $\int \frac{du}{(pu-pa)^2}$, $\int \frac{du}{(pu-pa)^3}$, ...

51. **Entre deux fonctions elliptiques $f(u)$ et $f_1(u)$ aux mêmes périodes existe une relation algébrique.** — En effet, si l'on fait

$$X = f(u), \qquad Y = f_1(u),$$

X et Y sont, d'après le théorème du n° 49, des fonctions rationnelles

$$(77) \qquad X = R(p, p'), \qquad Y = R_1(p, p'),$$

des quantités $p\,u$ et $p'u$ liées par la relation

$$(78) \qquad p'^2 u = 4 p^3 u - g_2 p\,u - g_3.$$

L'élimination de p et p' entre les relations (77) et (78) donne évidemment une relation algébrique entre X et Y

$$F(X, Y) = 0.$$

La courbe (C) définie par cette équation est, en général, du *premier genre*. C'est ainsi que si l'on fait

$$x = p\,u, \qquad y = p'u,$$

on a entre x et y la relation

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3,$$

définissant une cubique (c) sans point double, sauf dans le cas de dégénérescence. Les coordonnées X et Y d'un point de la courbe (C) sont des fonctions rationnelles des coordonnées x et y d'un point de la cubique (c).

On peut, en général, indiquer le degré de la relation entre X et Y. Si $f(u)$ est d'ordre r et $f_1(u)$ d'ordre r_1, la relation $F(X, Y) = 0$ est de degré r_1 en X et de degré r en Y.

En effet, X étant donné, la formule

$$X = f(u)$$

donne, pour u, r valeurs dans un parallélogramme ; à chacune de ces r valeurs, la formule

$$Y = f_1(u)$$

fait correspondre une seule valeur de Y. Donc à une valeur de X correspondent r valeurs de Y et l'équation $F(X, Y) = 0$ est de degré r en Y. On voit de même qu'elle est de degré r_1 en X.

Par exemple pu est du second ordre, $p'u$ du troisième ; aussi la relation algébrique entre ces deux fonctions est du second degré en p' et du troisième en p.

52. **Toute fonction elliptique $f(u)$ admet un théorème d'addition algébrique.** — En effet $f(u)$ est une fonction rationnelle de pu et $p'u$

$$f(u) = R(pu, p'u).$$

De même

$$f(v) = R(pv, p'v).$$

Formant ensuite $f(u+v)$ qui est une fonction rationnelle de $p(u+v)$ et $p'(u+v)$, et exprimant $p(u+v)$ et $p'(u+v)$ en fonction de pu, pv, $p'u$, $p'v$ par les formules d'addition, on voit que $f(u+v)$ est une fonction rationnelle de pu, pv, $p'u$, $p'v$

$$f(u+v) = R_1(pu, pv, p'u, p'v).$$

D'ailleurs

$$p'^2 u = 4p^3 u - g_2 pu - g_3,$$

$$p'^2 v = 4p^3 v - g_2 pv - g_3.$$

L'élimination de pu, pv, $p'u$, $p'v$ entre les cinq équations précédentes fournira une relation *algébrique* entre $f(u+v)$, $f(u)$ et $f(v)$.

La réciproque de ce théorème est vraie en ce sens que :

Toute fonction analytique uniforme transcendante qui a un théorème d'addition algébrique est nécessairement une fonction *simplement* ou *doublement* périodique. Nous nous bornons à énoncer cette proposition, dont la démonstration nous entraînerait en dehors du cadre de cet Ouvrage.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE II.

1. Démontrer les formules suivantes que nous empruntons aux *Formules et propositions pour l'emploi des fonctions elliptiques*, d'après les Leçons de Weierstrass, rédigées par M. Schwarz, traduites par M. Padé.

Dégénérescence. — Quand $\omega' = \infty$, ω étant fini et différent de zéro, on a

$$(1) \qquad pu = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)} - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 = \frac{\frac{9g_3}{2g_2}}{\sin^2\left(\sqrt{\frac{9g_3}{2g_2}}\,u\right)} - \frac{3g_3}{2g_2},$$

$$(2) \qquad \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 = \frac{9g_3}{2g_2}, \qquad e_1 = \frac{3g_3}{g_2}, \qquad e_2 = e_3 = -\frac{3g_3}{2g_2}, \qquad g_2^3 - 27g_3^2 = 0,$$

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\sigma' u}{\sigma u} = \dfrac{\pi}{2\omega}\cot\dfrac{u\pi}{2\omega} + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\pi}{2\omega}\right)^2 u, \qquad 2\eta\omega = \dfrac{\pi^2}{6}, \\[2ex] \sigma u = e^{\frac{1}{6}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2} \dfrac{2\omega}{\pi}\sin\dfrac{u\pi}{2\omega}. \end{cases}$$

On le démontrera en rapprochant les formules des nos 23 et 37.

Formules d'addition pour pu *et conséquences.*

$$(1) \qquad p(u \pm v) = pu - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{p'u \mp p'v}{pu - pv}\right) = pv - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{p'u \mp p'v}{pu - pv}\right),$$

$$(2) \qquad = pu + \frac{(6p^2u - \frac{1}{2}g_2)(pv - pu) + 4p^3u - g_2 pu - g_3 \mp p'u\,p'v}{2(pu - pv)^2},$$

$$(3) \qquad = pv + \frac{(6p^2v - \frac{1}{2}g_2)(pu - pv) + 4p^3v - g_2 pv - g_3 \mp p'u\,p'v}{2(pu - pv)^2},$$

$$(4) \qquad p(u \pm v) = \frac{2(pu\,pv - \frac{1}{4}g_2)(pu + pv) - g_3 \mp p'u\,p'v}{2(pu - pv)^2},$$

$$(5) \qquad = \frac{1}{4}\left[\frac{p'u \mp p'v}{pu - pv}\right]^2 - pu - pv.$$

$$(6) \qquad \frac{1}{p(u \pm v)} = \frac{2(pu\,pv - \frac{1}{4}g_2)(pu + pv) - g_3 \pm p'u\,p'v}{2(pu\,pv + \frac{1}{4}g_2)^2 + 2g_3(pu + pv)},$$

$$(7) \qquad p(u + v) + p(u - v) = \frac{2(pu\,pv - \frac{1}{4}g_2)(pu + pv) - g_3}{(pu - pv)^2},$$

$$(8) \qquad = 2pu - \frac{\partial^2}{\partial u^2}\log(pu - pv) = 2pv - \frac{\partial^2}{\partial v^2}\log(pu - pv).$$

$$(9)\qquad \wp(u+v)-\wp(u-v)=-\frac{\wp'u\,\wp'v}{(\wp u-\wp v)^2}=-\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log(\wp u-\wp v),$$

$$(10)\qquad \wp(u+v)\,\wp(u-v)=\frac{(\wp u\,\wp v+\frac{1}{4}g_2)^2+g_3(\wp u+\wp v)}{(\wp u-\wp v)^2},$$

$$(11)\qquad \begin{cases} \wp'(u\pm v)= \left[\dfrac{(\wp'v)^2}{(\wp v-\wp u)^3}-\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\wp''v}{(\wp v-\wp u)^2}\right]\wp'u \\ \qquad\qquad \pm\left[\dfrac{(\wp'u)^2}{(\wp u-\wp v)^3}-\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\wp''u}{(\wp u-\wp v)^2}\right]\wp'v, \end{cases}$$

$$(12)\qquad 4[\wp(u)+\wp(v)+\wp(u+v)]=\left(\frac{\wp'u-\wp'v}{\wp u-\wp v}\right)^2=\left[\frac{\wp'(u+v)+\wp'(v)}{\wp(u+v)-\wp(v)}\right]^2,$$

$$(13)\qquad \frac{\wp'u-\wp'v}{\wp u-\wp v}=\frac{-\wp'(u+v)-\wp'(v)}{\wp(u+v)-\wp(v)},$$

$$(14)\qquad \begin{vmatrix} 1 & \wp u & \wp'u \\ 1 & \wp v & \wp'v \\ 1 & \wp(u+v) & -\wp'(u+v) \end{vmatrix}=0,$$

$$(15)\qquad \wp(2u)=\frac{(\wp^2u+\frac{1}{4}g_2)^2+2g_3\wp u}{4\wp^3u-g_2\wp u-g_3}=\wp u-\frac{1}{4}\,\frac{d^2}{du^2}\log\wp'u.$$

Par l'intégration on déduit de la dernière formule

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{\sigma'(2u)}{\sigma(2u)}=2\,\dfrac{\sigma'u}{\sigma u}+\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\wp''u}{\wp'u}, \qquad \dfrac{\sigma(2u)}{\sigma^4u}=-\wp'u, \\ \sigma(2u)=\sigma^4u\,\dfrac{d^3\log\sigma u}{du^3}=2\sigma u(\sigma'u)^3-3\sigma^2u\,\sigma'u\,\sigma''u+\sigma^3u\,\sigma'''u. \end{cases}$$

2. Le déterminant

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & \wp u & \wp'u \\ 1 & \wp v & \wp'v \\ 1 & \wp w & \wp'w \end{vmatrix},$$

où u, v, w sont trois variables indépendantes, a pour valeur

$$\frac{\sigma(v-w)\,\sigma(w-u)\,\sigma(u-v)\,\sigma(u+v+w)}{(\sigma u\,\sigma v\,\sigma w)^3}.$$

Pour le démontrer remarquons que ce déterminant, considéré comme une fonction de u, est une fonction elliptique d'ordre 3 ayant le pôle triple $u=0$ et les points homologues. Cette fonction a manifestement les zéros v et w, car si l'on fait $u=v$ ou $u=w$ deux lignes sont identiques. Le troisième zéro de la fonction est donc homologue du point $-(v+w)$, car la somme des zéros ne diffère de la somme des infinis, qui est nulle, que

par des multiples des périodes. On a donc

$$\Delta = C\frac{\sigma(u-v)\,\sigma(u-w)\,\sigma(u+v+w)}{\sigma^3 u},$$

C désignant une constante indépendante de u. Pour la déterminer on multipliera par u^3 et l'on fera $u=0$. Le produit $u^3\Delta$ tend alors vers $2(pv-pw)$, et le second membre tend vers

$$C\,\sigma v\,\sigma w\,\sigma(v+w).$$

Donc

$$C = 2\frac{pv-pw}{\sigma v\,\sigma w\,\sigma(v+w)}.$$

Décomposant alors $pv-pw$ en facteurs (n° 43) on a la valeur de C et l'on obtient la formule indiquée [1].

3. **Fonctions σ_1, σ_2, σ_3.** — Les équations

$$(1)\qquad \sqrt{pu-e_1}=\frac{\sigma_1 u}{\sigma u},\qquad \sqrt{pu-e_2}=\frac{\sigma_2 u}{\sigma u},\qquad \sqrt{pu-e_3}=\frac{\sigma_3 u}{\sigma u}$$

définissent les trois racines carrées en fonctions uniformes de u. Si l'on donne successivement à la variable u les valeurs

$$\omega_1=\omega,\qquad \omega_2=\omega+\omega'=\omega'',\qquad \omega_3=\omega',$$

on obtient les équations

$$(2)\quad\begin{cases}\sqrt{e_1-e_2}=\dfrac{\sigma_2\omega}{\sigma\omega}=\dfrac{e^{\eta''\omega}\sigma\omega'}{\sigma\omega\,\sigma\omega''}, & \sqrt{e_1-e_3}=\dfrac{\sigma_3\omega}{\sigma\omega}=\dfrac{e^{-\eta'\omega}\sigma\omega''}{\sigma\omega\,\sigma\omega'},\\[2ex] \sqrt{e_2-e_1}=\dfrac{\sigma_1\omega''}{\sigma\omega''}=-\dfrac{e^{\eta\omega''}\sigma\omega'}{\sigma\omega\,\sigma\omega''}, & \sqrt{e_2-e_3}=\dfrac{\sigma_3\omega''}{\sigma\omega''}=-\dfrac{e^{\eta'\omega''}\sigma\omega}{\sigma\omega'\,\sigma\omega''},\\[2ex] \sqrt{e_3-e_1}=\dfrac{\sigma_1\omega'}{\sigma\omega'}=\dfrac{e^{-\eta\omega'}\sigma\omega''}{\sigma\omega\,\sigma\omega'}, & \sqrt{e_3-e_2}=\dfrac{\sigma_2\omega'}{\sigma\omega'}=\dfrac{e^{\eta''\omega'}\sigma\omega}{\sigma\omega'\,\sigma\omega''},\end{cases}$$

par lesquelles sont déterminées sans ambiguïté les valeurs des six racines carrées. Dans l'hypothèse que le coefficient de i dans $\dfrac{\omega'}{\omega}$ est positif, on a, entre ces radicaux, les relations

$$(3)\quad\begin{cases}\sqrt{e_3-e_2}=-i\sqrt{e_2-e_3},\\ \sqrt{e_3-e_1}=-i\sqrt{e_1-e_3},\\ \sqrt{e_2-e_1}=-i\sqrt{e_1-e_2}.\end{cases}$$

---

[1] *Voyez*, pour des formules de ce genre, HERMITE, *Journal de Crelle*, t. 84.

Relations entre les carrés des fonctions σ, σ_1, σ_2, σ_3 — Les relations

$$pu - e_\lambda = \frac{\sigma_\lambda^2 u}{\sigma^2 u} \qquad (\lambda = 1, 2, 3)$$

donnent, par l'élimination de pu, les formules

$$\begin{gathered}
\sigma_2^2 u - \sigma_3^2 u + (e_2 - e_3)\sigma^2 u = 0,\\
\sigma_3^2 u - \sigma_1^2 u + (e_3 - e_1)\sigma^2 u = 0,\\
\sigma_1^2 u - \sigma_2^2 u + (e_1 - e_2)\sigma^2 u = 0,\\
(e_2 - e_3)\sigma_1^2 u + (e_3 - e_1)\sigma_2^2 u + (e_1 - e_2)\sigma_3^2 u = 0.
\end{gathered}$$

Différentiations des quotients de fonctions σ. — L'équation

(1) $$p' u = -2\frac{\sigma_\lambda u\, \sigma_\mu u\, \sigma_\nu u}{\sigma u\, \sigma u\, \sigma u}$$

donne pour les fonctions

(2) $$\frac{\sigma u}{\sigma_\lambda u}, \qquad \frac{\sigma_\mu u}{\sigma_\nu u}, \qquad \frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u},$$

les équations différentielles suivantes

(3) $$\left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{du}\frac{\sigma u}{\sigma_\lambda u} = \frac{\sigma_\mu u}{\sigma_\lambda u}\frac{\sigma_\nu u}{\sigma_\lambda u},\\
&\frac{d}{du}\frac{\sigma_\mu u}{\sigma_\nu u} = -(e_\mu - e_\nu)\frac{\sigma_\lambda u}{\sigma_\nu u}\frac{\sigma u}{\sigma_\nu u}, \qquad \frac{d}{du}\frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u} = -\frac{\sigma_\mu u}{\sigma u}\frac{\sigma_\nu u}{\sigma u}.
\end{aligned}\right.$$

Exemples de décompositions en éléments simples.

$$\begin{gathered}
\frac{1}{2}\frac{p' u}{pu - e_\lambda} = \frac{\sigma'_\lambda u}{\sigma_\lambda u} - \frac{\sigma' u}{\sigma u} = \frac{d}{du}\log\frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u},\\
\frac{1}{2}\frac{(e_\mu - e_\nu)p' u}{(pu - e_\mu)(pu - e_\nu)} = \frac{\sigma'_\mu u}{\sigma_\mu u} - \frac{\sigma'_\nu u}{\sigma_\nu u} = \frac{d}{du}\log\frac{\sigma_\mu u}{\sigma_\nu u},\\
-\frac{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)}{pu - e_\lambda} - e_\lambda = \frac{d}{du}\frac{\sigma'_\lambda u}{\sigma_\lambda u} = \frac{d^2}{du^2}\log \sigma_\lambda u.
\end{gathered}$$

4. Soit $\varphi(u)$ une fonction elliptique du *second ordre* aux périodes 2ω et $2\omega'$. Si cette fonction admet, dans un parallélogramme des périodes, un seul pôle double $u = a$ avec la partie principale $\frac{A}{(u-a)^2}$, sa dérivée $\varphi'(u)$ admet dans un parallélogramme les trois zéros $\alpha = a + \omega$, $\beta = a + \omega'$, $\gamma = a + \omega + \omega'$ et l'on a

$$\frac{A}{4}\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2 = [\varphi(u) - \varphi(\alpha)][\varphi(u) - \varphi(\beta)][\varphi(u) - \varphi(\gamma)].$$

Ces théorèmes se démontrent soit en exprimant $\varphi(u)$ à l'aide de pu

$$\varphi(u) = A\,p(u-a) + B,$$

soit en remarquant que

$$\varphi(2a-u) = \varphi(u),$$

d'où, en différentiant,

$$\varphi'(2a-u) = -\varphi'(u);$$

relation qui montre que $\varphi'(u)$ s'annule pour $u=\alpha$, $u=\beta$, $u=\gamma$, car elle donne, par exemple, $\varphi'(\alpha) = -\varphi'(\alpha)$.

Si $\varphi(u)$ a, dans un parallélogramme, deux pôles simples a et b de résidus A et $-A$, $\varphi'(u)$ admet dans un parallélogramme quatre zéros

$$u_1 = \frac{a+b}{2}, \qquad u_2 = \frac{a+b}{2} + \omega,$$

$$u_3 = \frac{a+b}{2} + \omega', \qquad u_4 = \frac{a+b}{2} + \omega + \omega',$$

et l'on a

$$A^2\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2 = [\varphi(u)-\varphi(u_1)][\varphi(u)-\varphi(u_2)] \times [\varphi(u)-\varphi(u_3)][\varphi(u)-\varphi(u_4)].$$

On le démontrera en établissant la relation

$$\varphi(a+b-u) = \varphi(u)$$

et, par différentiation,

$$\varphi'(a+b-u) = -\varphi'(u).$$

5. Démontrer que l'on a, quels que soient les arguments a, b, c, d, la relation

$$\begin{aligned}&\sigma(a+b)\,\sigma(a-b)\,\sigma(c+d)\,\sigma(c-d)\\ &-\sigma(a+c)\,\sigma(a-c)\,\sigma(b+d)\,\sigma(b-d)\\ &+\sigma(a+d)\,\sigma(a-d)\,\sigma(b+c)\,\sigma(b-c),\end{aligned}$$

désignée quelquefois sous le nom d'*équation à trois termes*. — Elle résulte de l'identité

$$(A-B)(C-D)-(A-C)(B-D)+(A-D)(B-C) = 0,$$

où l'on fait

$$A = pa, \qquad B = pb, \qquad C = pc, \qquad D = pd$$

et de la formule

$$pu - pv = \frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma u\, \sigma v}.$$

6. Démontrer qu'il existe une relation linéaire et homogène entre les

fonctions

$$\sigma(u+a)\,\sigma(u-a), \qquad \sigma(u+b)\,\sigma(u-b), \qquad \sigma(u+c)\,\sigma(u-c).$$

La fonction

$$\frac{P\,\sigma(u+b)\,\sigma(u-b)+Q\,\sigma(u+c)\,\sigma(u-c)}{\sigma(u+a)\,\sigma(u-a)}$$

est une fonction doublement périodique ayant deux pôles dans un parallélogramme des périodes; on peut déterminer le rapport des constantes P et Q de façon que le numérateur s'annule pour $u=a$; P et Q étant ainsi déterminés, la fonction se réduit à une constante.

On retrouve ainsi la relation précédente.

CHAPITRE III.

ÉTUDE DES VALEURS RÉELLES DE pu LORSQUE ω EST RÉEL ET ω' PUREMENT IMAGINAIRE. APPLICATIONS.

51. Dans la théorie générale que nous venons d'exposer, les périodes 2ω et $2\omega'$ sont des constantes imaginaires quelconques, assujetties à la seule condition que leur rapport soit imaginaire. Un cas particulier des plus importants, qui se présente fréquemment dans les applications, est le cas où l'une des périodes 2ω est réelle et l'autre $2\omega'$ purement imaginaire, c'est-à-dire égale au produit de i par un nombre réel. Comme on peut toujours changer le signe des périodes, on peut prendre 2ω positif, alors $2\omega'$ étant supposé purement imaginaire, $\frac{2\omega'}{i}$ sera positif aussi, car nous avons fait la convention que, dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$, le coefficient de i est positif.

C'est ce cas que nous allons examiner en détail, pour faire ensuite quelques applications géométriques et mécaniques. Pour que ce cas se présente, il faut et il suffit que les racines e_1, e_2, e_3 soient réelles.

I. — Valeurs réelles de pu quand ω et $\frac{\omega'}{i}$ sont réels et positifs.

52. **Les invariants g_2 et g_3 sont alors réels.** — Si l'on suppose ω et $\frac{\omega'}{i}$ réels et positifs, les invariants

$$(1)\qquad \begin{cases} g_2 = 2^2.3.5\sum{}' \dfrac{1}{w^4}, \qquad g_3 = 2^2.5.7\sum{}' \dfrac{1}{w^6}, \\ w = 2m\omega + 2n\omega', \end{cases}$$

sont réels. En effet, à toute valeur imaginaire de w correspond pour w une valeur imaginaire conjuguée, puisqu'en changeant le

signe de n on change le signe du coefficient de i. Dans chacune des séries précédentes, les termes qui correspondent à deux valeurs imaginaires conjuguées de w ont une somme réelle : on en conclut que g_2 et g_3 sont réels.

53. **Valeurs réelles de l'argument.** — En raisonnant de même pour chacune des séries

$$pu - \frac{1}{u^2} = \sum{}' \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right], \qquad p'u = -2 \sum \frac{1}{(u-w)^3},$$

où l'on suppose u réel, on reconnaît que pu et $p'u$ sont réelles quand l'argument u est réel.

Les valeurs de u qui rendent la dérivée nulle ou infinie sont de la forme

$$m_1 \omega + n_1 \omega',$$

m_1 et n_1 étant des nombres entiers.

1° Lorsque u croît de o à ω par valeurs réelles, $p'u$ varie d'une manière continue et ne change pas de signe; pour u positif et très petit $p'u$ est très grande, en valeur absolue, et négative puisque sa valeur principale est

$$-\frac{2}{u^3};$$

pour $u = \omega$, $p'u$ s'annule.

Donc, quand u croît de o à ω, la dérivée est constamment négative, et elle passe par toute valeur négative; la fonction pu décroît constamment depuis $+\infty$ jusqu'à $p\omega = e_1$. Cette valeur e_1 est réelle.

L'équation

$$p'^2 u = 4p^3 u - g_2 pu - g_3$$

montre alors que u croissant de o à ω, c'est-à-dire pu décroissant de ∞ à e_1, le polynome $4p^3u - g_2 pu - g_3$ ne s'annule que pour $u = \omega$ c'est-à-dire pour $pu = e_1$. Le polynome $4x^3 - g_2 x - g_3$ n'a donc pas de racine réelle supérieure à e_1 : la plus grande racine de ce polynome est la valeur que prend pu, quand u égale la demi-période réelle.

L'argument u variant toujours de o à ω, $p'u$ est négatif, et l'on a,

en extrayant la racine,

$$p'u = -\sqrt{4p^3u - g_2 pu - g_3},$$

ou, en posant $x = pu$,

$$du = -\frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}.$$

Comme x décroît de ∞ à e_1 quand u croît de o à ω, on a, en intégrant par rapport à u de o à ω et par rapport à x de ∞ à e_1, par valeurs réelles,

$$\omega = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}.$$

2° Supposons maintenant que u est réel mais n'est plus compris entre o et ω. Les égalités

$$p(-u) = pu, \qquad p'(-u) = -p'u$$

montrent d'abord que, quand u varie entre $-\omega$ et o, pu est réel et plus grande que e_1, $p'u$ est positive et prend toutes les valeurs positives.

On peut toujours ramener un argument réel à être compris entre $-\omega$ et ω, en retranchant de cet argument un multiple de la période 2ω; les résultats précédents s'énoncent ainsi :

Quand l'argument u est réel la fonction pu et sa dérivée $p'u$ sont réelles. La valeur de pu est plus grande que e_1 et le signe de $p'u$ est celui de $(-1)^{m+1}$, si l'on a

$$m\omega < u < (m+1)\omega,$$

m étant un nombre entier.

54. **Argument purement imaginaire.** — Quand l'argument u est purement imaginaire, la fonction pu est *réelle* et $p'u$ *purement imaginaire*. C'est ce qu'on voit immédiatement en se reportant aux séries. En effet, si l'on fait $u = iv$, en supposant v réel, la série pu donne

$$p(iv|\omega, \omega') = -\frac{1}{v^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(iv+w)^2} - \frac{1}{w^2}\right]$$
$$= -\frac{1}{v^2} - \sum{}' \left[\frac{1}{(v+iw)^2} - \frac{1}{(iw)^2}\right].$$

Dans cette dernière série $iw = 2mi\omega + 2m'i\omega'$; elle définit donc, au signe près, la fonction $p(v)$ construite avec les périodes $i\omega'$ et $i\omega$, ou avec les périodes $-i\omega'$ et $i\omega$, car on peut changer le signe d'une des périodes. On a donc

$$(2) \qquad p(iv|\omega, \omega') = -p\left(v\left|\frac{\omega'}{i}, i\omega\right.\right).$$

La fonction $p(iv|\omega, \omega')$, où l'argument est purement imaginaire, est ainsi ramenée à une autre fonction p à argument réel v, construite avec les périodes $\frac{\omega'}{i}$ et $i\omega$ dont la première est encore *réelle* et la seconde *purement imaginaire* avec un coefficient de i positif. Donc, quand u est purement imaginaire, $p(u)$ est *réelle*.

Cette formule (2) est un cas particulier des formules d'homogénéité établies au n° 36 : on l'obtiendrait en prenant $\mu = i$.

Les nouveaux invariants relatifs aux nouvelles périodes $\frac{\omega'}{i}$ et $i\omega$ se déduisent des expressions (1) en y remplaçant w par iw; ils sont donc égaux à g_2 et à $-g_3$. On peut donc écrire aussi

$$(3) \qquad p(iv;\, g_2, g_3) = -p(v;\, g_2, -g_3).$$

Si l'on prend les dérivées par rapport à v dans les relations (2) et (3) on a

$$p'(iv|\omega, \omega') = i\,p'\left(v\left|\frac{\omega'}{i}, i\omega\right.\right),$$

$$p'(iv;\, g_2, g_3) = i\,p'(v;\, g_2, -g_3).$$

Donc, quand u est purement imaginaire, $p'(u)$ est purement imaginaire.

La fonction $y = p\left(v\left|\frac{\omega'}{i}, \omega\right.\right) = p(v;\, g_2, -g_3)$ vérifie l'équation

$$\left(\frac{dy}{dv}\right)^2 = p'^2(v) = 4y^3 - g_2 y + g_3;$$

le polynome en y qui est dans le second membre admet pour racines $-e_1$, $-e_2$, $-e_3$. D'après ce que nous avons vu dans le numéro précédent, quand v varie par valeurs réelles de 0 à la demi-période réelle $\frac{\omega'}{i}$, la nouvelle fonction $p(v)$ décroît constamment par valeurs réelles de ∞ à $p\left(\frac{\omega'}{i}\left|\frac{\omega'}{i}, i\omega\right.\right)$ qui est la plus grande

racine $-e_3$ du polynome $4y^3 - g_2 y + g_3$. L'on a de plus

$$(1) \qquad \frac{\omega'}{i} = \int_{-e_3}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y + g_3}}.$$

Donc, quand $u = iv$ varie par valeurs purement imaginaires de o à ω', la fonction $x = p(u|\omega, \omega')$, qui est égale à $-p\left(v \middle| \frac{\omega'}{i}, i\omega\right)$, *croît constamment* par valeurs réelles de $-\infty$ à $p(\omega'|\omega, \omega')$, c'est-à-dire de $-\infty$ à la plus petite racine e_3 du polynome $4x^3 - g_2 x - g_3$.

D'une façon générale, en appliquant à la fonction $p\left(v \middle| \frac{\omega'}{i}, \omega\right)$ et à sa dérivée ce que nous avons vu dans le numéro précédent, pour un argument réel, on a le résultat suivant :

Quand l'argument u est purement imaginaire, la fonction pu est réelle et $p'u$ est purement imaginaire, la valeur de la fonction pu est négative et toujours inférieure à e_3; $\frac{1}{i}p'(u)$ a le signe de $(-1)^{m+1}$ si l'on a

$$m\frac{\omega'}{i} < \frac{u}{i} < (m+1)\frac{\omega'}{i},$$

m étant un nombre entier.

55. **Racines e_1, e_2, e_3.** — Parmi les racines du polynome $4x^3 - g_2 x - g_3$ la plus grande et la plus petite sont donc

$$e_1 = p(\omega|\omega, \omega'), \qquad e_3 = p(\omega'|\omega, \omega').$$

Ces deux racines étant réelles et les invariants g_2 et g_3 étant réels, la troisième racine e_2 est réelle aussi : elle est comprise entre les deux précédentes et a pour valeurs

$$e_2 = p(\omega + \omega'|\omega, \omega').$$

Ainsi, en désignant, comme nous l'avons fait, par e_1, e_2, e_3 les racines qui correspondent aux demi-périodes ω, $\omega + \omega'$, ω', on a

$$e_1 > e_2 > e_3.$$

56. **Autres valeurs de u rendant pu réelle.** — Nous trouverons d'autres valeurs de l'argument faisant prendre à la fonction des

valeurs réelles en considérant les développements de $p(u+\omega')$ et de $p(u+\omega)$.

1° *Argument* $u+\omega'$, *u étant réel.* — D'après la définition même de pu, on a

$$p(u+\omega') - p\omega' = \sum\left[\frac{1}{(u-\mu\omega-\nu\omega')^2} - \frac{1}{(\mu\omega+\nu\omega')^2}\right],$$
$$\mu = \quad 0, \quad \pm 2, \quad \pm 4, \quad \ldots,$$
$$\nu = \pm 1, \quad \pm 3, \quad \pm 5, \quad \ldots.$$

Lorsque u est réel, si l'on change ν en $-\nu$ dans un terme imaginaire de la série, on obtient un autre terme imaginaire conjugué du précédent et la somme de ces deux termes est réelle. Donc $p(u+\omega')$ est réel quand u est réel. On voit, de même, que la dérivée

$$p'(u+\omega') = -2\sum\frac{1}{(u-\mu\omega-\nu\omega')^3}$$

est réelle.

Quand u croît par valeurs réelles de 0 à ω, $u+\omega'$ varie de ω' à $\omega+\omega'$ et $p'(u+\omega')$ ne devient ni nul, ni infini, sauf pour les valeurs extrêmes qui annulent toutes deux $p'(u+\omega')$. Ainsi $p'(u+\omega')$ garde un signe constant : $p(u+\omega')$ varie toujours dans le même sens. Or, la valeur de cette fonction pour $u=0$ est e_3 ; pour $u=\omega$, elle est $e_2 > e_3$. Donc $p(u+\omega')$ croît constamment de e_3 à e_2.

D'après cela, le signe constant de la dérivée est le signe $+$. Comme cette dérivée part de zéro pour revenir à zéro et reste finie elle a un maximum.

Ainsi, quand u croît de 0 *à* ω, $p(u+\omega')$ *est réel et croît de* e_3 *à* e_2 ; *la dérivée* $p'(u+\omega')$ *est réelle, positive et inférieure à un certain maximum.*

On en conclut une seconde expression de la période réelle 2ω. En effet, en faisant

$$p(u+\omega') = x,$$

on a

$$du = \frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}},$$

et quand u varie de 0 à ω, x varie de e_3 à e_2 par valeurs réelles ;

on a donc, en intégrant par rapport à u de o à ω, et par rapport à x de e_3 à e_2,

$$\omega = \int_{e_3}^{e_2} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}.$$

2° *Argument $it - \omega$, t étant réel.* — Considérons enfin un argument de la forme $-\omega + it$, t étant réel. Dans la formule

$$p(iv \mid \omega, \omega') = -p\left(v \,\Big|\, \frac{\omega'}{i}, i\omega\right),$$

faisons $iv = -\omega + it$,

$$p(-\omega + it \mid \omega, \omega') = -p\left(t + \omega i \,\Big|\, \frac{\omega'}{i}, i\omega\right).$$

la fonction qui est dans le second membre rentre, à un changement de notation près, dans le cas précédent.

Quand t varie de o à $\frac{\omega'}{i}$ cette fonction varie constamment dans le même sens : il en est de même de la fonction $p(-\omega + it \mid \omega, \omega')$; or, cette fonction part de e_1 pour arriver à e_2; elle décroît donc constamment. Sa dérivée prise par rapport à t, $i\,p'(-\omega + it \mid \omega, \omega')$ est négative et, comme elle part de zéro pour arriver à zéro, elle reste supérieure à un certain minimum.

Ainsi, quand t varie de o *à* $\frac{\omega'}{i}$, $p(-\omega + it)$ *décroît de e_1 à e_2; $i\,p'(-\omega + it)$ est négative et reste supérieure à un certain minimum.*

Comme

$$p(\omega + it \mid \omega, \omega') = p(-\omega + it \mid \omega, \omega'),$$

le même résultat s'applique aux fonctions

$$p(\omega + it) \quad \text{et} \quad i\,p'(\omega + it).$$

Remarque. — Nous venons de trouver des valeurs de u pour lesquelles la valeur de la fonction pu est réelle et nous avons déjà reconnu que, dans le cas actuel où les quantités ω et $\frac{\omega'}{i}$ sont réelles, la fonction pu peut prendre une valeur réelle quelconque.

Les autres valeurs de l'argument, pour lesquelles la fonction

prend des valeurs réelles, peuvent se déduire des précédentes, en remarquant que l'équation

$$pu - pv = 0$$

entraîne (n° 43)

$$u = \pm v,$$

à des multiples près des périodes.

57. **Résumé.** — Considérons le rectangle de sommets o, ω, $\omega + \omega'$, ω'. Quand l'argument u décrit le contour de ce rectangle dans le sens o, ω, $\omega + \omega'$, ω', o, la fonction pu est réelle et diminue constamment de $+\infty$ à $-\infty$:

1° Quand u va de o au sommet ω, pu est réelle et décroît de ∞ à e_1 ; $p'u$ est négative.

2° Quand u va de ω à ω', pu décroît de e_1 à e_2, $p'u$ est purement imaginaire positive.

3° La variable u allant de $\omega + \omega'$ à ω', pu décroît de e_2 à e_3, $p'u$ est réelle et positive.

4° Enfin u revenant de ω' à o, pu décroît de e_3 à $-\infty$; $p'u$ est purement imaginaire négative.

En tout point pris dans le rectangle pu est imaginaire.

II. — ÉTUDE DE LA CUBIQUE DÉFINIE PAR LES ÉQUATIONS $x = pu$, $y = p'u$. LEMNISCATE.

58. **Cas général.** — Considérons la cubique ayant pour équation

$$(1) \qquad y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3,$$

où g_2 et g_3 désignent des constantes données quelconques. On démontre, en Géométrie analytique, que l'on peut, par une projection centrale ou perspective, ramener l'équation de toute courbe du troisième ordre à cette forme.

Construisons la fonction $p(u; g_2, g_3)$; nous pourrons exprimer les coordonnées d'un point de la courbe (1) en fonction d'un paramètre u, en posant

$$(2) \qquad x = pu, \qquad y = p'u.$$

A chaque valeur de u répond alors un point de la courbe, car

les fonctions p et p′ sont uniformes : ce point reste le même quand on ajoute à u des multiples des périodes 2ω et $2\omega'$. Réciproquement, à chaque point (x, y) de la courbe répond, dans un parallélogramme des périodes, *une seule valeur* de u. En effet, x étant donné seul, l'équation

$$x = p(u)$$

donne, pour u, deux valeurs u_1 et $-u_1$ et toutes les valeurs homologues : comme la fonction $p'u$ est impaire, à ces deux systèmes de valeurs de u, correspondent deux valeurs de y égales et de signes contraires ; ce sont les deux valeurs que l'on tirerait de l'équation (1). Si l'on fait choix d'une de ces valeurs de y, il lui correspond donc une seule valeur de u, u_1 par exemple, et les valeurs homologues. La proposition est établie.

On a ainsi une représentation paramétrique parfaite de la courbe.

59. **Condition pour que trois points soient en ligne droite.** — Soient M_1, M_2, M_3 les trois points où une droite quelconque

$$y - ax - b = 0$$

coupe la courbe. Les valeurs u_1, u_2, u_3, situées dans un parallélogramme élémentaire et correspondant à ces trois points, sont racines de l'équation

$$p'u - a p u - b = 0.$$

Le premier membre de cette équation est une fonction elliptique d'ordre 3 : elle a, dans un parallélogramme élémentaire, trois zéros u_1, u_2, u_3 et un infini triple homologue du point $u = 0$; d'après le théorème de Liouville, on a donc

$$(3) \qquad u_1 + u_2 + u_3 = 2n\omega + 2n'\omega',$$

n et n' étant des entiers.

Cette condition qui est nécessaire pour que les trois points correspondant à u_1, u_2, u_3 soient en ligne droite, est *suffisante*. En effet, soient M_1, M_2, M_3 les trois points correspondant aux trois valeurs u_1, u_2, u_3. Joignons les deux premiers par une droite et appelons M_3' le point où cette droite coupe la cubique

et u'_3 le paramètre correspondant. Les trois points M_1, M_2, M'_3 étant en ligne droite, on a

$$u_1 + u_2 + u'_3 = 2m\omega + 2m'\omega',$$

m et m' entiers. En comparant à la relation (3) supposée vérifiée, on voit que u'_3 ne diffère de u_3 que par des multiples des périodes; donc M'_3 coïncide avec M_3 et les trois points considérés sont en ligne droite.

60. **Formule d'addition.** — La relation (3) permet de retrouver la formule d'addition de pu. Si l'on appelle u et v les paramètres de deux points de la courbe, le point en ligne droite avec les deux premiers correspond à la valeur $-(u+v)$ du paramètre.

D'après cela, les abscisses des trois points d'intersection de la cubique avec une droite peuvent être représentées par

$$pv, \quad pu, \quad p(u+v);$$

et les ordonnées par

$$p'v, \quad p'u, \quad -p'(u+v).$$

L'équation aux x des points d'intersection est

$$F(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3 - (ax+b)^2 = 0.$$

On voit d'abord que la somme des racines est $\frac{a^2}{4}$, ce qui donne la relation

$$pu + pv + p(u+v) = \frac{a^2}{4},$$

à laquelle il faut joindre l'une des suivantes

$$a = \frac{p'u - p'v}{pu - pv} = \frac{-p'(u+v) - p'v}{p(u+v) - pv} = \frac{-p'(u+v) - p'u}{p(u+v) - pu},$$

obtenues en déterminant le coefficient angulaire de la droite au moyen des coordonnées de deux de ses points.

En éliminant a on trouve le théorème d'addition

$$pu + pv + p(u+v) = \frac{1}{4}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2.$$

On peut déduire de la même équation $F(x) = 0$ une autre

formule d'addition donnant une expression du produit

$$(pu - pv)[p(u+v) - pv],$$

qui est très souvent utile. Posons

$$x_1 = pv, \quad x_2 = pu, \quad x_3 = p(u+v);$$

nous aurons l'identité

$$4x^3 - g_2x - g_3 - (ax+b)^2 \equiv 4(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

Prenons les dérivées des deux membres puis faisons $x = x_1$, nous trouverons

$$12x_1^2 - g_2 - 2a(ax_1 + b) = 4(x_2 - x_1)(x_3 - x_1),$$

ou, en introduisant les valeurs de la fonction p et se rappelant que $p''v = 6p^2v - \frac{1}{2}g_2$,

$$2(pu - pv)[p(u+v) - pv] = p''v - ap'v,$$

$$a = \frac{p'u - p'v}{pu - pv}.$$

En particulier, si $a = 0$, on a l'égalité

$$p''v = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1),$$

qui donne une interprétation géométrique de la seconde dérivée $p''v$ et permet de trouver son signe quand elle est réelle.

Addition d'une demi-période. — Ces considérations donnent une signification géométrique simple aux formules d'addition d'une demi-période établies dans le n° 47. On les obtient en coupant la courbe par une sécante passant par un des points où elle rencontre l'axe Ox. Ces points A_1, A_2, A_3 ont pour coordonnées $y = 0$ avec

$$x = e_1, \quad x = e_2, \quad x = e_3.$$

Ils correspondent aux valeurs ω, $\omega + \omega'$, ω' de l'argument u.

Si donc on coupe par une sécante joignant le point

$$A_1(y = 0, x = e_1)$$

correspondant à la valeur ω du paramètre à un point M' de la

courbe correspondant à la valeur u du paramètre, cette sécante coupe la courbe en un troisième point M'' correspondant à une valeur u'' telle que

$$\omega + u + u'' = 2n\omega + 2n'\omega',$$

et, en négligeant des multiples de périodes, on peut prendre $u'' = -(u + \omega)$. Ainsi les abscisses des points M' et M'' sont

$$x' = pu, \qquad x'' = p(u + \omega).$$

D'autre part, en coupant la courbe

$$y^2 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$$

par une sécante issue du point A_1

$$y = m(x - e_1),$$

on a, pour déterminer les abscisses x' et x'', l'équation

$$m^2(x - e_1) = 4(x - e_2)(x - e_3).$$

Si dans cette équation on considère $x - e_1$ comme l'inconnue, le produit des racines $(x' - e_1)(x'' - e_1)$ a pour valeur

$$(x' - e_1)(x'' - e_1) = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3).$$

On a donc, d'après les valeurs de x' et x'',

$$[pu - e_1][p(u + \omega) - e_1] = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3),$$

ce qui est une des formules établies dans le n° 47. On obtiendrait de même les deux autres en coupant par une sécante passant par l'un des points A_2 ou A_3.

61. **Tangentes menées d'un point de la courbe.** — Menons la tangente à la courbe au point dont le paramètre est u, cette tangente rencontre encore la courbe en un point; soit v le paramètre de ce point. On a, d'après la condition qui exprime que trois points sont en ligne droite,

$$v + 2u = 2n\omega + 2n'\omega'.$$

On en déduit

$$u = -\frac{v}{2} + \frac{2n\omega + 2n'\omega'}{2}.$$

Dans cette formule, on peut donner à n et n' toutes les valeurs entières; mais deux valeurs de u qui diffèrent par des multiples de 2ω et $2\omega'$ donnent le même point de la courbe; il suffit donc de donner à n et n' les valeurs o et 1 associées de toutes les manières possibles. On a ainsi les quatre valeurs de u

$$-\frac{v}{2},\quad -\frac{v}{2}+\omega,\quad -\frac{v}{2}+\omega',\quad -\frac{v}{2}+\omega+\omega'.$$

Donc, par un point pris sur la courbe, on peut lui mener, en général, quatre tangentes distinctes de la tangente au point considéré.

Points d'inflexion. — Comme autre application, cherchons les points d'inflexion. Si u est le paramètre d'un point d'inflexion, la tangente d'inflexion coupe la courbe en trois points confondus avec celui-là; il faudra donc faire dans (1), à des multiples près des périodes,

$$u_1 = u_2 = u_3 = u;$$

d'où

$$u = \frac{2n\omega + 2n'\omega'}{3}.$$

Dans cette formule, on peut donner à n et n' toutes les valeurs entières; mais deux valeurs de u qui diffèrent par des multiples de 2ω et $2\omega'$ donnent le même point d'inflexion. Il suffit donc de donner à n et n' les valeurs o, 1 et 2 associées de toutes les manières possibles. On trouve ainsi *neuf* points d'inflexion dont les paramètres sont donnés par le Tableau suivant, où $u_{n,n'}$ désigne la valeur de u correspondant à un choix déterminé des entiers n et n' :

$$u_{0,0} = 0,\qquad u_{0,1} = \frac{2\omega'}{3},\qquad u_{0,2} = \frac{4\omega'}{3},$$

$$u_{1,0} = \frac{2\omega}{3},\qquad u_{1,1} = \frac{2\omega+2\omega'}{3},\qquad u_{1,2} = \frac{2\omega+4\omega'}{3},$$

$$u_{2,0} = \frac{4\omega}{3},\qquad u_{2,1} = \frac{4\omega+2\omega'}{3},\qquad u_{2,2} = \frac{4\omega+4\omega'}{3}.$$

Ces points sont trois à trois en ligne droite; la droite, qui joint deux quelconques d'entre eux, passe par un troisième; on a, par

exemple,

$$u_{0,0}+u_{1,1}+u_{2,2}=2\omega+2\omega'.$$

Le premier point $u_{0,0}$ est rejeté à l'infini dans la direction de Oy.

62. **Condition pour que $3n$ points de la cubique soient sur une courbe d'ordre n.** — Cherchons d'abord la condition pour que six points de la cubique soient sur une conique.

Si l'on coupe la cubique par une conique

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

l'équation qui détermine les paramètres des points d'intersection s'obtiendra en remplaçant x et y par pu et par $p'u$. Le premier membre de cette équation est une fonction doublement périodique qui, dans un parallélogramme élémentaire comprenant l'origine, admet zéro comme pôle d'ordre 6 et n'admet pas d'autre pôle; l'équation admet donc six racines (n°s 38 et 39) et la somme de ces racines est nulle, à des multiples près des périodes.

Ainsi la condition nécessaire pour que six points de la cubique soient sur une conique est que les paramètres de ces six points vérifient l'égalité

$$u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+u_6=2n\omega+2n'\omega'.$$

La condition est suffisante car si elle est remplie, la conique, passant par les cinq premiers points, coupe la cubique en un sixième point dont le paramètre u'_6 doit être congruent à u_6.

On obtiendrait, de même, la condition pour que $3n$ points de la cubique soient sur une courbe d'ordre n. Cette condition est

$$u_1+u_2+\ldots+u_{3n}\equiv 0.$$

Par exemple, une autre cubique coupe la cubique donnée en neuf points qui doivent être assujettis à une condition, puisque, par neuf points donnés, il ne passe, en général, qu'une seule cubique. Le théorème précédent exprime cette condition de la façon la plus simple.

Ce théorème a de très nombreuses applications géométriques, nous en donnerons seulement quelques exemples.

Applications. — 1° Lorsque six des neufs points d'intersection de deux cubiques appartiennent à une même conique les trois autres points sont en ligne droite.

En effet, soient $u_1, u_2, \ldots, u_9$ les paramètres des neuf points suivant lesquels la cubique donnée est coupée par une autre cubique, on a la condition

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_6 + \ldots + u_9 \equiv 0,$$

où, comme dans tout ce qui suit, le signe $\equiv$ indique que l'égalité a lieu *à des multiples de périodes près*. Supposons que les six premiers points appartiennent à une même conique, on aura cette autre condition

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_6 \equiv 0,$$

et l'on déduit de ces deux conditions l'égalité

$$u_7 + u_8 + u_9 \equiv 0,$$

qui exprime bien que les trois derniers points sont en ligne droite. Le théorème est donc démontré.

2° Si l'on considère une conique variable passant par quatre points fixes pris sur une cubique, la droite qui joint les deux points d'intersection mobiles passe par un point fixe de la cubique.

Soient $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ les paramètres des six points d'intersection, les quatre premiers se rapportant aux points fixes. Posons

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = v;$$

v est une constante. La relation qui exprime que les six points considérés de la cubique sont sur une conique devient

$$v + u_5 + u_6 \equiv 0;$$

elle exprime que les points dont les paramètres sont u_5, u_6 et v sont en ligne droite. Comme v est le paramètre d'un point fixe, la proposition se trouve démontrée.

Courbes de contact. — Les applications suivantes sont relatives à des courbes de contact, c'est-à-dire à des courbes qui ont avec la cubique plusieurs points d'intersection confondus.

3° Considérons d'abord des coniques trois fois tangentes à la

cubique ; si l'on désigne les paramètres des points de contact par u_1, u_2, u_3 on doit avoir

$$2u_1 + 2u_2 + 2u_3 = 2n\omega + 2n'\omega',$$

ou bien

$$u_1 + u_2 + u_3 = n\omega + n'\omega' ;$$

il suffit de donner à chacun des nombres entiers n et n' les valeurs de 0 et 1.

Si l'on prend

$$n = 0, \qquad n' = 0,$$

l'égalité exprime que les trois points sont en ligne droite. C'est le cas où la conique se réduit à une droite double ; écartons ce cas ; il reste trois familles de coniques correspondant aux relations

$$u_1 + u_2 + u_3 = \omega,$$
$$u_1 + u_2 + u_3 = \omega',$$
$$u_1 + u_2 + u_3 = \omega + \omega'.$$

On peut donc choisir arbitrairement deux des points de contact pour chaque conique d'une famille. Prenons une conique, de la première famille par exemple ; si l'on fait passer une conique par les trois points de contact u_1, u_2, u_3, elle rencontrera encore la cubique en trois points u'_1, u'_2, u'_3 et l'on aura

$$u_1 + u_2 + u_3 + u'_1 + u'_2 + u'_3 = 2n\omega + 2n'\omega'.$$

De cette relation et de la condition déjà vérifiée par u_1, u_2, u_3, on déduit

$$u'_1 + u'_2 + u'_3 = \omega,$$

et l'on voit que les trois nouveaux points sont aussi les points de contact d'une conique trois fois tangente à la cubique appartenant à la même famille.

4° Cherchons encore les points de la cubique où la conique osculatrice a un contact du cinquième ordre, ou, ce qui revient au même, les coniques qui rencontrent la cubique en six points confondus.

On doit avoir pour le paramètre du point de contact

$$6u = 2n\omega + 2n'\omega',$$

ou bien

$$u = \frac{n}{6}2\omega + \frac{n'}{6}2\omega'.$$

Chacun des nombres entiers n et n' peut prendre toutes les valeurs de 0 à 5, ce qui donne $6^2 = 36$ points.

On trouve parmi ces points les neuf points d'inflexion qu'on obtient en considérant les tangentes d'inflexion comme des droites doubles, puis

$$6^2 - 3^2 = 27$$

points de contact de véritables coniques surosculatrices. Ces points sont six par six sur des coniques.

63. **Cas particulier où ω et $\frac{\omega'}{i}$ sont réels. Forme de la courbe. Nature de l'argument donnant des points réels.** — Nous allons maintenant examiner le cas particulier où ω et $\frac{\omega'}{i}$ sont réels, de façon à avoir une représentation géométrique des résultats du paragraphe précédent. Dans ce cas, la courbe a pour équation

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3),$$

où e_1, e_2, e_3 sont réels et rangés par ordre de grandeur décroissante. Pour que y soit réel il faut que x soit compris entre e_3 et e_2 ou plus grand que e_1. On voit immédiatement que la courbe est formée d'une ovale A_3A_2 et d'une branche infinie A_1 de nature parabolique, sur laquelle la tangente tend à devenir parallèle à Oy (*fig.* 5).

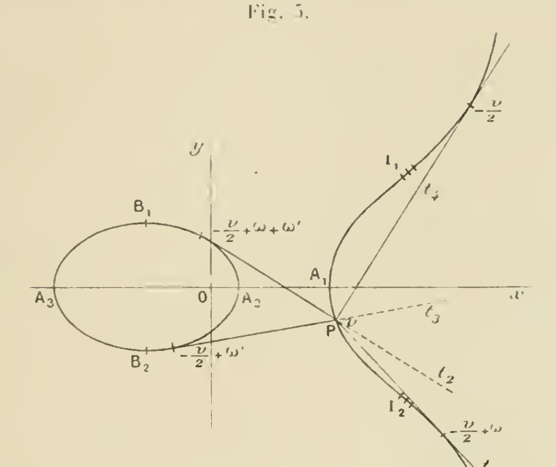
Cherchons quelles valeurs il faut donner à u pour obtenir les point réels de la courbe. D'abord, pour obtenir les points de la branche infinie, il faut donner à u des valeurs faisant varier x de e_1 à $+\infty$, c'est-à-dire des valeurs réelles. Puis, pour obtenir les points de l'ovale, il faut donner à u des valeurs faisant varier x de e_3 à e_2, c'est-à-dire des valeurs de la forme $u + \omega'$, u étant réel.

On peut facilement suivre sur la courbe la marche du point (x, y) quand l'argument prend ces deux systèmes de valeurs.

Supposons d'abord u réel; il suffit, à cause de la périodicité, de le faire varier de $-\omega$ à $+\omega$, en remarquant que des valeurs de u

égales et de signes contraires donnent des points de la courbe symétriques par rapport à Ox. Quand u croît de o à ω, x décroît de $+\infty$ à e_1, y croît de $-\infty$ à o : on a donc la branche infinie de courbe située au-dessous de Ox et venant aboutir au point A_1 dont les coordonnées sont e_1 et o. Au point A_1 la tangente est parallèle à Oy puisque $\frac{dx}{du} = p'u$ s'annule pour $u = \omega$ et que $\frac{dy}{du}$ ne

Fig. 5.



s'annule pas pour cette valeur. Quand u varie de o à $-\omega$, on obtient la branche de courbe symétrique de la précédente par rapport à Ox. Nous avons ainsi construit la partie de la courbe donnée par des valeurs réelles de l'argument.

Supposons maintenant l'argument de la forme $u+\omega'$ et faisons varier u, par valeurs réelles, de o à ω; x croît de e_3 à e_2; y est positif, varie d'une manière continue et part de zéro pour revenir à zéro. On a donc la branche de courbe située au-dessus de Ox et allant du point $A_3(e_3, o)$ au point $A_2(e_2, o)$; les tangentes en A_3 et A_2 sont parallèles à Oy. L'argument étant toujours de la forme $u+\omega'$, en faisant varier u par valeurs réelles de o à $-\omega$, on obtient le deuxième arc de l'ovale symétrique du premier par rapport à Ox. Nous avons ainsi construit la partie de la courbe (ovale) correspondant aux valeurs de la forme $u+\omega'$, u réel.

Tangentes parallèles à Ox. Signe de $\wp'' u$. — Comme on a $y = \wp' u$, les valeurs de u correspondant aux points où la tangente est parallèle à Ox sont racines de l'équation $\frac{dy}{du} = 0$ ou $\wp'' u = 0$. La fonction $\wp'' u$, qui est paire et d'ordre 4, a, dans un parallélogramme, quatre zéros deux à deux égaux et de signes contraires. Il y a donc sur la courbe quatre points où la tangente est parallèle à Ox. Deux points, les points B_1 et B_2, sont seuls réels : en effet les abscisses de ces points sont racines de l'équation $\frac{dy}{dx} = 0$ ou, d'après l'équation de la courbe, $12x^2 - g_2 = 0$. Cette équation, dont le premier membre est la dérivée du polynome $4x^3 - g_2 x - g_3$, a une racine α entre e_1 et e_2 et une autre β entre e_2 et e_3 ; cette dernière seule donne des points réels B_1 et B_2.

L'identité $2\wp'' u = 12\wp^2 u - g_2 = 12x^2 - g_2$ donne le signe de $\wp'' u$. Sur la branche infinie, $x > \alpha$, $\wp'' u$ est positif. Pour l'ovale, sur l'arc $B_1 A_2 B_2$, $\wp'' u$ est négatif, car x est alors compris entre les deux racines α et β de $12x^2 - g_2$; sur l'arc $B_1 A_3 B_2$, $\wp'' u$ est positif, car x est inférieur à β.

Tangentes menées par un point de paramètre v. — Nous avons vu que les quatre points de contact correspondent aux valeurs du paramètre

$$-\frac{v}{2}, \quad -\frac{v}{2} + \omega, \quad -\frac{v}{2} + \omega', \quad -\frac{v}{2} + \omega - \omega'.$$

On peut donc, par un point P pris sur la courbe, mener quatre tangentes, en général distinctes de la tangente au point considéré.

Lorsque v est réel, pour deux des points de contact, l'argument est réel ; pour les deux autres il est de la forme $\omega' + u_1$, u_1 étant réel. Donc, lorsque le point P est pris sur la branche infinie, les quatre tangentes sont réelles : deux des points de contact sont sur l'ovale et les deux autres sur la branche infinie. Lorsque v est de la forme $\omega' + v_1$, v_1 étant réel, on a

$$\frac{v}{2} = \frac{\omega'}{2} + \frac{v_1}{2}.$$

Les arguments des points de contact ne sont ni réels, ni de la forme $\omega' + u_1$, u_1 étant réel (à des périodes près). Par un point P

pris sur l'ovale on ne peut pas mener à la courbe une tangente réelle.

Points d'inflexion. — Nous avons trouvé plus haut neuf valeurs du paramètre donnant les neuf points d'inflexion. Dans le cas particulier que nous examinons ici, trois de ces valeurs

$$0, \quad \frac{2\omega}{3}, \quad \frac{4\omega}{3}$$

sont réelles; elles donnent trois points d'inflexion réels situés sur la branche infinie, le premier à l'infini, les deux autres aux points I_1 et I_2 symétriques par rapport à Ox. Ces trois points sont en ligne droite.

64. **Dégénérescence. Cas d'un point double.** — Supposons le discriminant $g_2^3 - 27g_3^2$ *nul*. La cubique a alors un point double. Une des périodes $2\omega'$ est infinie (nos 23 et 37) et pu se réduit à

$$x = pu = -\frac{\pi^2}{12\omega^2} + \frac{\pi^2}{4\omega^2}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi u}{2\omega}},$$

d'où

$$y = p'u = -\frac{\pi^3}{4\omega^3}\frac{\cos\frac{\pi u}{2\omega}}{\sin^3\frac{\pi u}{2\omega}}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que les trois points correspondant aux valeurs u_1, u_2, u_3 du paramètre soient en ligne droite est alors

$$u_1 + u_2 + u_3 = 2n\omega,$$

où n est un entier. C'est ce qu'il est aisé de vérifier. En effet les valeurs de u correspondant aux trois points d'intersection de la cubique avec la droite $Ax + By + C = 0$ sont alors racines de l'équation

$$A pu + B p'u + C = 0,$$

ou, en désignant par a, b, c d'autres constantes,

$$a\frac{1}{\sin^2\frac{\pi u}{2\omega}} + b\frac{\cos\frac{\pi u}{2\omega}}{\sin^3\frac{\pi u}{2\omega}} + c = 0,$$

équation du troisième degré en

$$t = \cot \frac{\pi u}{2\omega},$$

$$a(1 + t^2) + b\,t(1 + t^2) + c = 0.$$

La somme des produits des racines deux à deux étant 1 on a, d'après la formule donnant la cotangente d'une somme,

$$\cot \frac{\pi}{2\omega}(u_1 + u_2 + u_3) = \infty,$$

d'où

$$\frac{\pi}{2\omega}(u_1 + u_2 + u_3) = n\pi,$$

ce qui est bien la relation indiquée. Actuellement il n'y a plus que trois points d'inflexion; car en faisant $u_1 = u_2 = u_3 = u$, on a

$$3u = 2n\omega,$$

d'où trois valeurs donnant des points distincts

$$u' = 0, \qquad u'' = \frac{2\omega}{3}, \qquad u''' = \frac{4\omega}{3}.$$

Ces points sont en ligne droite car

$$u' + u'' + u''' = 2\omega.$$

Cas d'un point de rebroussement. — Si $g_2 = g_3 = 0$ la cubique devient

$$y^2 = 4x^3;$$

elle a un rebroussement. Alors les deux périodes ω et ω' sont infinies; on a (n° 23) :

$$x = \mathrm{p}u = \frac{1}{u^2}, \qquad y = \mathrm{p}'u = -\frac{2}{u^3}.$$

Les trois valeurs de u correspondant à trois points en ligne droite vérifient alors la relation

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0;$$

en effet, elles sont racines d'une équation de la forme

$$\frac{2}{u^3} + \frac{a}{u^2} + b = 0,$$

qui, rendue entière, ne contient pas de terme en u^2.

Il n'y a plus qu'un point d'inflexion, car en faisant

$$u_1 = u_2 = u_3 = u,$$

on a

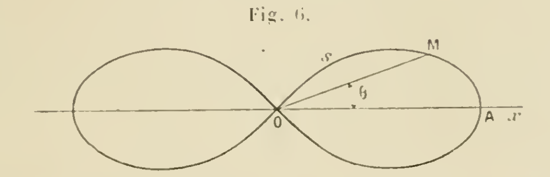
$$3u = 0.$$

Ce point d'inflexion est d'ailleurs rejeté à l'infini.

65. **Rectification de la lemniscate.** — Soit une lemniscate ayant pour équation en coordonnées polaires

$$r^2 = 2\cos 2\theta.$$

Fig. 6.



L'arc OM $= s$ (*fig.* 6), compté à partir du point double où r est nul, est donné par les formules

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2\,d\theta^2} = \frac{2\,dr}{\sqrt{4 - r^4}},$$

$$s = \int_0^r \frac{2\,dr}{\sqrt{4 - r^4}}.$$

Faisons le changement de variable

$$r = \sqrt{\frac{1}{z}},$$

il vient

$$s = -\int_\infty^z \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - z}},$$

on a donc une intégrale de la forme

$$\int_\infty^z \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}},$$

avec $g_2 = 1$, $g_3 = 0$. On en conclut

$$z = p(s; 1, 0) = \frac{1}{r^2}.$$

On a ainsi une représentation géométrique de la fonction $p(s; 1, 0)$ pour les valeurs réelles de l'argument.

Actuellement les racines e_1, e_2, e_3 sont $\frac{1}{2}$, 0 et $-\frac{1}{2}$. Les expressions

$$\sqrt{z-\frac{1}{2}}, \quad \sqrt{z}, \quad \sqrt{z+\frac{1}{2}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\sqrt{2-r^2}}{r\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{r}, \quad \frac{\sqrt{2+r^2}}{r\sqrt{2}},$$

ou encore

$$\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{r}, \quad \frac{1}{r}, \quad \frac{\sqrt{2}\cos\theta}{r},$$

sont des fonctions uniformes de s exprimées par les quotients

$$\frac{\sigma_1(s)}{\sigma(s)}, \quad \frac{\sigma_2(s)}{\sigma(s)}, \quad \frac{\sigma_3(s)}{\sigma(s)}.$$

On a ainsi une représentation géométrique de ces trois fonctions pour le cas $g_2 = 1$, $g_3 = 0$.

La demi-période réelle est donnée par

$$\omega = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}} = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - z}}.$$

Elle est égale au quart de la longueur totale de la lemniscate, car en revenant à la variable r, on a

$$\omega = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2\,dr}{\sqrt{4-r^4}},$$

ce qui est la longueur de l'arc OA.

III. — Pendule sphérique. Corps pesant de révolution. Élastique gauche.

66. **Pendule sphérique.** — Le pendule sphérique est constitué par un point pesant mobile sans frottement sur une sphère fixe. Prenons pour origine le centre de la sphère et pour axe des z une verticale dirigée vers le haut. En coordonnées semipolaires l'équation de la sphère est

$$r^2 + z^2 = l^2,$$

en désignant par l la longueur du pendule. Le mobile est soumis à l'action de deux forces, son poids et la réaction normale de la sphère ; le théorème des forces vives donne donc

$$v^2 = -2gz + h.$$

De plus, les deux forces étant dans un même plan avec l'axe des z, on peut appliquer le principe des aires à la projection du mouvement sur le plan xOy :

$$r^2\,d\psi = C\,dt,$$

ψ désignant l'angle polaire. Ces trois équations déterminent z, r et ψ en fonction de t.

Cherchons d'abord à déterminer z : il faudra pour cela éliminer r et ψ. L'équation des forces vives peut s'écrire

$$\frac{dr^2 + r^2\,d\psi^2 + dz^2}{dt^2} = -2gz + h.$$

De l'équation de la sphère, on tire $r = \sqrt{l^2 - z^2}$; d'autre part, l'équation des aires donne

$$d\psi = \frac{C\,dt}{r^2} = \frac{C\,dt}{l^2 - z^2}.$$

Portant ces expressions dans l'équation des forces vives, on a une équation de la forme

(1) $$l^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \varphi(z),$$

où $\varphi(z)$ désigne le polynome du troisième degré

$$\varphi(z) = (h - 2gz)(l^2 - z^2) - C^2.$$

On en déduit le temps t et l'angle ψ en fonction de z par des intégrales elliptiques.

Pour que $\frac{dz}{dt}$ soit réel, il faut que $\varphi(z)$ soit positif. Ce polynome a ses racines réelles : en effet, appelons z_0 la valeur initiale de z et substituons dans $\varphi(z)$ la suite des nombres $+\infty$, l, z_0, $-l$; nous trouverons, pour les résultats des substitutions, les signes $+$, $-$, $+$, $-$, car z_0 rend évidemment $\varphi(z_0)$ positif, la valeur initiale

de $\frac{dz}{dt}$ étant réelle. Il y a donc une racine z_1 de $\varphi(z)$ entre $+\infty$ et l, une autre z_2 entre l et z_0, une troisième z_3 entre z_0 et $-l$. Ainsi les nombres de la suite

$$z_1,\quad l,\quad z_2,\quad z_0,\quad z_3,\quad -l$$

sont rangés par ordre de grandeur décroissante. La variable z partant de z_0 ne peut varier que dans l'intervalle $z_2\, z_3$.

Calcul de z. — La coordonnée z est donnée en fonction de t par l'équation (1) d'après laquelle $l^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ est égal à un polynome $\varphi(z)$ du troisième degré en z. Pour en tirer z par une fonction elliptique de t, nous commencerons par faire un changement linéaire de variable de la forme

$$(2)\qquad z = Ms + N,$$

où s désigne la nouvelle inconnue et M et N deux constantes telles que l'équation (1) prenne la forme

$$(3)\qquad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3.$$

Par la substitution (2) l'équation (1) devient

$$(4)\qquad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{\varphi(z)}{M^2 l^2} = \frac{\varphi(Ms+N)}{M^2 l^2}.$$

Pour identifier avec la forme (3), il faut égaler à 4 le coefficient de s^3 et à 0 celui de s^2 dans le deuxième membre. On a ainsi

$$(5)\qquad M = \frac{2l^2}{g},\qquad N = \frac{h}{6g}.$$

L'équation prend alors la forme (3) à condition d'attribuer aux constantes g_2 et g_3 des valeurs convenablement choisies.

Comme le polynome $\varphi(z)$ a trois racines réelles $z_1 > z_2 > z_3$, le polynome transformé

$$\frac{\varphi(Ms+N)}{M^2 l^2} = 4s^3 - g_2 s - g_3$$

a trois racines réelles e_1, e_2, e_3

$$(6)\qquad e_1 = \frac{z_1 - N}{M}, \qquad e_2 = \frac{z_2 - N}{M}, \qquad e_3 = \frac{z_3 - N}{M},$$

et l'on a $e_1 > e_2 > e_3$, car M est positif.

Construisons alors la fonction pu avec les invariants g_2 et g_3 : cette fonction vérifie l'équation

$$p'^2 u = 4p^3 u - g_2 pu - g_3 = \frac{\varphi(Mpu + N)}{M^2 l^2}.$$

Si donc on pose

$$s = pu, \qquad z = Mpu + N,$$

u étant regardé comme fonction du temps t, l'équation (4) devient

$$(p'u)^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 4p^3 u - g_2 pu - g_3,$$

d'où

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 1, \qquad \frac{du}{dt} = \pm 1.$$

On peut toujours prendre le signe +, car pu étant paire, on peut changer le signe de u. On a alors

$$u = t + \text{const.}$$

Cherchons maintenant de quelle forme est la constante. Comme la valeur trouvée pour M est positive, la relation

$$z = Mpu + N$$

montre que $s = pu$ varie dans le même sens que z. Donc quand z décroît de z_2 à z_3, pu décroît de e_2 à e_3, $u - \omega'$ est donc réel et l'on a

$$u = t + \omega',$$

si l'on compte le temps à partir de l'instant où $z = z_3$.

La demi-période réelle ω est le temps que met z à varier de z_2 à z_3.

Calcul de ψ. — L'angle ψ est défini par l'équation différentielle

$$d\psi = \frac{C\,dt}{l^2 - z^2},$$

que nous écrirons, en remarquant que $dt = du$,

$$d\psi = \frac{C\,du}{2l}\left(-\frac{1}{z-l} + \frac{1}{z+l}\right).$$

Dans cette équation, il faut remplacer z par sa valeur

$$z = M\,pu + N;$$

le coefficient de du est alors une fonction elliptique de u que nous allons décomposer en éléments simples, de façon à pouvoir intégrer.

Considérons deux arguments a et b définis par les relations

(7) $$l = M\,pa + N, \qquad -l = M\,pb + N.$$

ces arguments sont définis aux signes près; nous verrons plus loin comment il convient de choisir leurs signes. Alors l'expression de $d\psi$ devient

$$d\psi = \frac{C\,du}{2Ml}\left(-\frac{1}{pu - pa} + \frac{1}{pu - pb}\right),$$

où il reste à donner une forme simple au coefficient $\frac{C}{2Ml}$.

Pour cela remarquons que le polynome

$$\frac{\varphi(z)}{M^2 l^2} = \frac{\varphi(M\,pu + N)}{M^2 l^2}$$

se réduit à $-\frac{C^2}{M^2 l^2}$ pour $z = l$ et $z = -l$, c'est-à-dire pour $u = a$ et $u = b$; comme on a identiquement

$$p'^2 u = \frac{\varphi(M\,pu + N)}{M^2 l^2},$$

on trouve, en faisant successivement $u = a$ et $u = b$,

$$p'^2 a = -\frac{C^2}{M^2 l^2}, \qquad p'^2 b = -\frac{C^2}{M^2 l^2}.$$

Nous prendrons, en extrayant les racines,

$$p' a = p' b = \frac{iC}{Ml},$$

ce qu'on peut toujours faire, car jusqu'à présent les signes de a

et b n'étaient pas déterminés; nous les déterminons par le choix de signes que nous venons de faire pour $p'a$ et $p'b$.

On peut donc écrire

$$2i\frac{d\psi}{du} = \frac{p'b}{pu - pb} - \frac{p'a}{pu - pa}.$$

La décomposition du second membre en éléments simples se fait en appliquant deux fois la formule (64) du n° 44

$$\begin{aligned}2i\frac{d\psi}{du} = &\ \zeta(u+a) - \zeta(u-a) - 2\zeta a,\\ &- \zeta(u+b) + \zeta(u-b) + 2\zeta b.\end{aligned}$$

En intégrant et en remontant des logarithmes aux nombres on trouve

$$e^{2i\psi} = -\mathrm{E}^2\frac{\sigma(u+a)}{\sigma(u-a)}\frac{\sigma(u-b)}{\sigma(u+b)}e^{2u(\zeta b - \zeta a)}.$$

La constante d'intégration $-\mathrm{E}^2$ se détermine par les conditions initiales.

L'angle ψ est ainsi exprimé en fonction du temps.

Expressions de x et y. — On a

$$e^{2i\psi} = \frac{x+iy}{x-iy} = -\mathrm{E}^2\frac{\sigma(u+a)}{\sigma(u-a)}\frac{\sigma(u-b)}{\sigma(u+b)}e^{2u(\zeta b - \zeta a)}.$$

D'autre part, d'après l'équation de la sphère,

$$(x+iy)(x-iy) = (l-z)(l+z) = -\mathrm{M}^2(pu - pa)(pu - pb),$$

$$(x+iy)(x-iy) = -\mathrm{M}^2\frac{\sigma(u+a)\,\sigma(u-a)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 a}\frac{\sigma(u+b)\,\sigma(u-b)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 b}.$$

En multipliant membre à membre les égalités qui donnent $\frac{x+iy}{x-iy}$ et $(x+iy)(x-iy)$ on obtient $(x+iy)^2$,

$$x+iy = \mathrm{EM}\frac{\sigma(u+a)\,\sigma(u-b)}{\sigma a\,\sigma b\,\sigma^2 u}e^{u(\zeta b - \zeta a)},$$

on en conclut

$$x-iy = -\frac{1}{\mathrm{E}}\mathrm{M}\frac{\sigma(u-a)\,\sigma(u+b)}{\sigma a\,\sigma b\,\sigma^2 u}e^{-u(\zeta b - \zeta a)}.$$

Enfin, remplaçons M par sa valeur en fonction des éléments elliptiques, valeur qui peut s'obtenir en retranchant membre à

membre les égalités

$$-t = \mathrm{M}\,pa - \mathrm{N}, \qquad -t = \mathrm{M}\,pb + \mathrm{N};$$

$$\mathrm{M} = \frac{2t}{pa - pb} = -2t\,\frac{\sigma^2 a\,\sigma^2 b}{\sigma(a+b)\,\sigma(a-b)}.$$

$$x + iy = -t\mathrm{E}\,\frac{2\sigma a\,\sigma b}{\sigma(a+b)\,\sigma(a-b)}\,\frac{\sigma(u+a)\,\sigma(u-b)}{\sigma^2 u}\,e^{u(\zeta b - \zeta a)},$$

$$x - iy = -\frac{t}{\mathrm{E}}\,\frac{2\sigma a\,\sigma b}{\sigma(a+b)\,\sigma(a-b)}\,\frac{\sigma(u-a)\,\sigma(u+b)}{\sigma^2 u}\,e^{-u(\zeta b - \zeta a)}.$$

On a ainsi x, y, z exprimés en fonctions uniformes de t. Quand t augmente de 2ω, z reprend la même valeur, l'angle polaire ψ augmente d'une certaine constante.

67. Corps pesant de révolution suspendu par un point de son axe. — Prenons pour origine le point de suspension O, pour axes liés au corps l'axe de révolution Oz et deux axes perpendiculaires, pour axes fixes la verticale ascendante Oz_1 et deux axes perpendiculaires. On démontre en Mécanique [1] que les angles d'Euler θ, φ, ψ, qui définissent la position des axes liés au corps par rapport aux axes fixes, sont donnés en fonction du temps par les formules suivantes. D'abord, en posant $\cos\theta = z$, on a

$$(1) \qquad \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2(\alpha - mz)(1 - z^2) - (\beta - nz)^2 = f(z),$$

où m, n, α, β désignent des constantes, dont la première m est positive, de sorte que $f(z)$ est un polynome du troisième degré. On a ensuite

$$(2) \qquad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\beta - nz}{1 - z^2},$$

$$(3) \qquad \frac{d\varphi}{dt} = r_0 - z\,\frac{d\psi}{dt} = r_0 - z\,\frac{\beta - nz}{1 - z^2},$$

r_0 désignant une autre constante.

Il s'agit de tirer de ces équations θ, φ, ψ en fonction du temps. Les calculs, comme on va le voir, présentent une grande analogie avec ceux que nous venons de faire pour le pendule sphérique.

---

(1) *Voir* APPELL, *Traité de Mécanique*, t. II, n° 402.

Cette analogie peut aller jusqu'à l'identité, car, dans le cas particulier où le corps pesant de révolution se réduit à un seul point matériel, il constitue un pendule sphérique.

Le polynome $f(z)$ est négatif pour les valeurs $-\infty$, -1 et $+1$ de z, tandis qu'il est positif pour la valeur initiale z_0 de z qui rend nécessairement $\frac{dz}{dt}$ réel et pour $+\infty$. Il a donc ses trois racines z_1, z_2, z_3 réelles et comprises respectivement dans les intervalles $(+\infty, +1)$, $(+1, z_0)$ et $(z_0, -1)$.

Calcul de z. — Commençons par faire un changement linéaire de variable

$$z = Ms + N,$$

où M et N sont des constantes choisies de telle façon que l'équation en s prenne la forme

$$(4) \qquad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3.$$

Par ce changement l'équation (1) devient

$$(5) \qquad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{f(Ms+N)}{M^2}.$$

On déterminera les coefficients M et N de façon à rendre égal à 4 le coefficient de s^3 et à 0 celui de s^2; après cette détermination, qui donne pour M la valeur positive $M = \frac{4}{m}$, on pourra écrire

$$(6) \qquad \frac{f(Ms+N)}{M^2} = 4s^3 - g_2 s - g_3,$$

à condition de donner aux invariants g_2 et g_3 les valeurs qui rendent le premier membre identique au deuxième.

Les racines du polynome $f(z)$ étant, par ordre de grandeurs décroissantes z_1, z_2, z_3, celles du polynome transformé en s seront

$$e_1 = \frac{z_1 - N}{M}, \qquad e_2 = \frac{z_2 - N}{M}, \qquad e_3 = \frac{z_3 - N}{M}.$$

Pour que $f(z)$ soit positif il faut que z partant de z_0 varie entre z_2 et z_3; donc s devra varier entre e_2 et e_3.

Si l'on construit la fonction pu aux invariants g_2 et g_3, cette

fonction vérifiera l'équation

$$(7) \qquad p'^2 u = \frac{f(M\,pu + N)}{M^2} = 4p^3 u - g_2 pu - g_3.$$

Nous poserons alors $s = pu$ en regardant u comme une fonction de t, et l'équation (5) deviendra

$$p'^2 u \left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 4p^3 u - g_2 pu - g_3,$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 1, \qquad \frac{du}{dt} = +1,$$

où nous prenons $+1$, car, pu étant paire, on peut toujours changer u de signe. On a alors

$$u = t + \text{const.},$$

et, comme $s = pu$ doit rester compris entre e_2 et e_3, $u - \omega'$ doit être réel. Nous ferons

$$(8) \qquad u = t + \omega';$$

alors pour $t = 0$, $u = \omega'$, $pu = e_3$, $z = z_3$.

Le temps est donc compté à partir d'un instant où $z = z_3$.

En résumé, nous avons exprimé z en fonction uniforme du temps par la formule

$$z = M\,pu + N, \qquad u = t + \omega'.$$

La demi-période ω est le temps que met z à varier de z_3 à z_2 et inversement.

Calcul de ψ. — On a

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\beta - nz}{1 - z^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta + n}{z + 1} - \frac{\beta - n}{z - 1}\right).$$

Remplaçant, dans cette expression, z par sa valeur

$$z = M\,pu + N,$$

et dt par du, on est ramené, pour avoir ψ, à intégrer une fonction elliptique. Pour faire cette intégration il faut décomposer la fonction elliptique du second membre en éléments simples. Pour

cela, déterminons deux arguments constants a et b par les conditions que pour $u=a$, z devienne égal à 1 et pour $u=b$, z devienne égal à -1

$$(9) \qquad \begin{cases} \mathrm{M}pa+\mathrm{N}=1, \\ \mathrm{M}pb+\mathrm{N}=-1. \end{cases}$$

Ces arguments sont déterminés aux signes près par ces deux équations, si l'on regarde comme équivalentes deux valeurs de a ou deux valeurs de b ne différant que par des multiples des périodes. On aura alors

$$\frac{d\psi}{du}=\frac{1}{2\mathrm{M}}\left(\frac{\beta+n}{pu-pb}-\frac{\beta-n}{pu-pa}\right).$$

Les rapports $\frac{\beta+n}{\mathrm{M}}$, $\frac{\beta-n}{\mathrm{M}}$ s'expriment d'une manière simple à l'aide de a et b. Remarquons pour cela que le polynome $f(z)$ se réduit à $-(\beta-n)^2$ pour $z=1$ et à $-(\beta+n)^2$ pour $z=-1$. Donc la fonction $f(\mathrm{M}pu+\mathrm{N})$ se réduit à $-(\beta-n)^2$ pour $u=a$ et à $-(\beta+n)^2$ pour $u=b$. Mais comme on a identiquement

$$p'^2u=\frac{f(\mathrm{M}pu+\mathrm{N})}{\mathrm{M}^2},$$

on a, en faisant successivement $u=a$ et $u=b$,

$$p'^2a=-\frac{(\beta-n)^2}{\mathrm{M}^2}, \qquad p'^2b=-\frac{(\beta+n)^2}{\mathrm{M}^2}.$$

En extrayant les racines, nous prendrons

$$p'a=i\frac{\beta-n}{\mathrm{M}}, \qquad p'b=i\frac{\beta+n}{\mathrm{M}},$$

en choisissant convenablement les signes de a et b qui jusqu'ici étaient restés indéterminés. Nous aurons alors

$$2i\frac{d\psi}{du}=\frac{p'b}{pu-pb}-\frac{p'a}{pu-pa}.$$

L'intégration s'effectue comme dans le cas du pendule sphérique.

Si l'on appelle α'', β'', γ'' les cosinus des angles que fait l'axe Oz

du corps avec les axes fixes Ox_1, Oy_1, Oz_1, on a

$$\gamma'' = z, \qquad \alpha''^2 + \beta''^2 + z^2 = 1;$$

de plus α'' et β'' sont les coordonnées x_1 et y_1 du point situé sur l'axe du corps à une distance 1 du point O; en appliquant une méthode identique à celle que nous avons suivie pour calculer x et y dans le pendule sphérique, avec ce seul changement que, actuellement, l se trouve remplacé par 1, on trouve

$$\alpha'' + i\beta'' = -\mathrm{E}\frac{2\sigma a\,\sigma b}{\sigma(a+b)\,\sigma(a-b)}\,\frac{\sigma(u+a)\,\sigma(u-b)}{\sigma^2 u}\,e^{u(\zeta b-\zeta a)},$$

$$\alpha'' - i\beta'' = \frac{1}{\mathrm{E}}\,\frac{2\sigma a\,\sigma b}{\sigma(a+b)\,\sigma(a-b)}\,\frac{\sigma(u-a)\,\sigma(u+b)}{\sigma^2 u}\,e^{-u(\zeta b-\zeta a)},$$

avec

$$u = t + \omega'.$$

Calcul de φ. — On a

$$\frac{d\varphi}{dt} = r_0 - z\frac{d\psi}{dt} = r_0 - z\frac{\beta - nz}{1 - z^2}.$$

Décomposant le second membre en fractions simples, il vient

$$\frac{d\varphi}{dt} = r_0 - n + \frac{1}{2}\left(\frac{\beta + n}{z+1} + \frac{\beta - n}{z-1}\right).$$

Remplaçons z par $\mathrm{M}pu + \mathrm{N}$ et introduisant comme tout à l'heure les arguments a et b, on a

$$\frac{d\varphi}{du} = r_0 - n + \frac{1}{2i}\left(\frac{p'a}{pu - pa} + \frac{p'b}{pu - pb}\right);$$

d'où, en décomposant en éléments simples,

$$2i\frac{d\varphi}{du} = 2i(r_0 - n) + \zeta(u-a) - \zeta(u+a) + 2\zeta a$$
$$+ \zeta(u-b) - \zeta(u+b) + 2\zeta b,$$

et en intégrant

$$e^{2i\varphi - 2i(r_0-n)u} = \mathrm{C}\,\frac{\sigma(u-a)\,\sigma(u-b)}{\sigma(u+a)\,\sigma(u+b)}\,e^{+2u(\zeta a+\zeta b)};$$

la constante C se détermine en écrivant, par exemple, que φ est nul pour $t = 0$, c'est-à-dire $u = \omega'$.

68. **La courbe élastique gauche** [1]. — Il s'agit de trouver la figure d'équilibre d'une tige flexible dont la section est circulaire et qui est soumise à l'action de forces appliquées seulement à ses extrémités.

Si l'on choisit convenablement les axes de coordonnées, on trouve pour définir la courbe cherchée les équations différentielles

$$(1)\qquad \begin{cases} y'z'' - z'y'' = \alpha x' + \beta y, \\ z'x'' - x'z'' = \alpha y' - \beta x, \\ x'y'' - y'x'' = \alpha z' + \gamma, \end{cases}$$

dans lesquelles x', y', z', x'', y'', z'' désignent les dérivées par rapport à l'arc s des coordonnées x, y, z et α, β, γ des constantes dont les deux premières sont essentiellement positives.

Ajoutons membre à membre les équations précédentes après avoir multiplié les deux membres de chacune d'elles respectivement par x', y', z'; en tenant compte de la relation

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1,$$

nous trouvons

$$(2)\qquad \alpha + \beta(yx' - xy') + \gamma z' = 0$$

et en différentiant le premier membre par rapport à s

$$(3)\qquad \beta(yx'' - xy'') + \gamma z'' = 0.$$

Multiplions maintenant par x les deux membres de la première équation différentielle, par y les deux membres de la deuxième et ajoutons, il vient

$$z''(xy' - yx') - z'(xy'' - yx'') = \alpha(xx' + yy'),$$

et si l'on remplace $xy' - yx'$ et $xy'' - yx''$ par leurs valeurs en fonction de z' et de z'' tirées des équations (2) et (3),

$$z''(\alpha + \gamma z') - z'\gamma z'' = \alpha\beta(xx' + yy'),$$

ou encore

$$\beta(xx' + yy') = z''.$$

[1] *Voir* HERMITE, *Sur quelques applications des fonctions elliptiques*, p. 93; et une Note de M. J. Bertrand dans la *Mécanique analytique de Lagrange* (édition publiée par M. Darboux, t. I, p. 460).

En intégrant et en désignant par δ une nouvelle constante

$$\beta(x^2+y^2)=2(z'-\delta).$$

Ainsi, des équations différentielles données (1), nous pouvons déduire le système suivant

$$\begin{aligned}\beta(xy'-yx') &= \alpha+\gamma z',\\ \beta(xx'+yy') &= z''\\ \beta(x^2+y^2) &= 2(z'-\delta).\end{aligned}$$

Servons-nous maintenant de l'identité

$$(xx'+yy')^2+(yx'-xy')^2=(x^2+y^2)(x'^2+y'^2),$$

nous obtiendrons, pour déterminer z', l'équation différentielle

$$\left(\frac{dz'}{ds}\right)^2=2\beta(1-z'^2)(z'-\delta)-(\alpha+\gamma z')^2.$$

Dans le cas particulier où $\gamma=0$, cette équation différentielle a, au signe de z' près, la même forme que celle qui s'est présentée à propos du pendule sphérique et s'intègre de la même manière.

Si $\gamma\neq 0$, l'équation différentielle ne diffère de celle qui donne $z=\cos\theta$, dans le mouvement d'un corps grave de révolution, que par le signe de z'; la méthode suivie dans ce dernier cas s'applique donc sans difficulté au cas de l'élastique gauche et l'on pourrait d'ailleurs mettre les problèmes en équation de manière à aboutir à des équations différentielles identiques.

D'après un théorème dû à Kirchhoff, l'axe d'un pendule sphérique ou d'une toupie dont la pointe est fixe reste toujours parallèle à la tangente à une courbe élastique gauche, le point de contact de la tangente décrivant la courbe avec une vitesse constante [1].

---

[1] *Voir* GREENHILL, *Fonctions elliptiques*, p. 320 et 324, POINCARÉ, *Leçons sur la Théorie de l'Élasticité*, p. 201.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE III.

1. Déterminer les paramètres des points de contact des tangentes menées à la cubique $x = pu$, $y = p'u$ par le sommet A_1 de la branche infinie (ω et ω' réels).

En conclure que, Ox étant supposé horizontal, si l'on considère le point le plus haut de l'ovale on peut prendre pour paramètre de ce point une quantité de la forme $a + \omega'$, a étant une quantité réelle comprise entre o et $\frac{\omega}{2}$.

Il suffit pour le voir de prendre un argument $u + \omega'$, de faire varier u de o à $\frac{\omega}{2}$ et de remarquer que $\frac{\omega}{2} + \omega'$ correspond à une tangente menée du sommet A_1.

2. Le rapport anharmonique des quatre tangentes menées à la cubique par un point P pris sur la courbe reste constant quand le point P se déplace sur la cubique.

On peut obtenir ce rapport anharmonique en fonction des coordonnées du point P et des coordonnées des quatre points de contact. On exprime ensuite ces coordonnées à l'aide des paramètres elliptiques correspondants et l'on applique la formule de l'exemple 2, page 63.

3. Si l'on appelle points correspondants d'une cubique deux points tels que les tangentes en ces points vont se couper sur la courbe, il y a trois points correspondants d'un point donné et, en désignant par u le paramètre du point donné, on peut prendre comme paramètres des points correspondants

$$u + \omega, \quad u + \omega', \quad u + \omega + \omega';$$

chacune des demi-périodes définit un des trois systèmes de correspondance.

Si l'on considère deux couples de points correspondants du même système : A, A' d'une part, B, B' d'autre part, les droites qui joignent les points non correspondants AB, A'B' ou AB', BA' se coupent sur la courbe et les deux nouveaux points sont des points correspondants dans le même système.

4. Sur la cubique définie par les équations

$$x = pu, \qquad y = p'u,$$

on prend deux points dont les paramètres diffèrent d'une constante v; la droite qui joint ces deux points enveloppe une courbe de sixième classe.

Dans le cas particulier où v a l'une des valeurs

$$\omega, \quad \omega', \quad \omega + \omega',$$

l'enveloppe est une courbe de troisième classe (qui se présente ici comme comptée deux fois).

Dans l'équation de la droite joignant les deux points on remplace les coordonnées courantes par les coordonnées x_0, y_0 d'un point P_0, l'équation en u ainsi obtenue a six racines dans un parallélogramme élémentaire. Dans le cas particulier où $v = \omega$ par exemple, l'équation en u ne change pas quand on change u en $u + \omega$.

Remarque. — La cubique donnée peut être regardée comme la hessienne d'une autre cubique C et cela de trois manières différentes; les courbes de troisième classe qui viennent d'être définies sont les cayleyennes des trois cubiques C [1].

5. Si deux systèmes de trois droites ont huit de leurs neuf points d'intersection sur une cubique, le neuvième point d'intersection est aussi sur la cubique.

Cette proposition peut se vérifier directement à l'aide de la condition pour que trois points soient en ligne droite; elle peut aussi se déduire d'un théorème démontré n° 62.

Si l'on appelle tangentiel d'un point m d'une cubique le point où la tangente en m rencontre encore la cubique, les tangentiels de trois points en ligne droite sont en ligne droite.

La droite qui joint deux points d'inflexion va passer par un troisième point d'inflexion; on remarque qu'un point d'inflexion se confond avec son tangentiel.

6. Déterminer les points d'inflexion de la cubique

$$x = pu, \qquad y = p'u,$$

en étudiant la variation du coefficient angulaire de la tangente.

On trouve pour les déterminer l'équation

$$p'u\, p'''u - (p''u)^2 = 0,$$

ou en posant $x = pu$, l'équation

$$f(x) = x^4 - \frac{1}{2} g_2 x^2 - g_3 x - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2} g_2\right)^2 = 0,$$

dont la dérivée est

$$f'(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3 = 0.$$

Si g_2 et g_3 sont réels, cette équation a deux racines réelles et deux racines imaginaires conjuguées. Ces racines sont

$$p\frac{2\omega}{3}, \quad p\frac{2\omega'}{3}, \quad p\left(\frac{2\omega}{3} + \frac{2\omega'}{3}\right), \quad p\left(\frac{2\omega}{3} - \frac{2\omega'}{3}\right);$$

---

(1) *Voir* Clebsch (Lindemann), *Leçons sur la Géométrie*, t. II, p. 381.

si on les désigne par a, b, c, d elles vérifient la relation

$$2S=(a-b)^2(c-d)^2+(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)=0,$$

qui s'obtient en appliquant les formules (7) et (9) page 62 (S est un invariant de l'équation).

7. Étant donnés trois points P, Q, R sur une cubique, déterminer un triangle ABC dont les sommets soient sur la courbe et dont les côtés passent respectivement par les points donnés P, Q, R.

Il y a quatre solutions. Si les trois points P, Q, R sont en ligne droite, les sommets de l'un des triangles sont en ligne droite : il reste seulement trois triangles proprement dits.

8. Si l'on considère une conique ayant deux fois un contact du deuxième ordre (trois points confondus) avec une cubique, la droite qui joint les points de contact va passer par un point d'inflexion.

9. Si l'on considère l'une des trois tangentes menées d'un point d'inflexion le point de contact est tel qu'il existe une conique ayant en ce point avec la cubique un contact du cinquième ordre (six points confondus). Retrouver que le nombre de ces coniques est 27.

10. On mène la tangente à une cubique en un point P_0; soit P_1 le point où cette tangente rencontre de nouveau la courbe. On mène la tangente en P_1, soit P_2 le point où cette tangente rencontre de nouveau la courbe. On détermine ainsi une suite de points

$$P_0,\quad P_1,\quad \ldots,\quad P_r,$$

dont chacun est le tangentiel du précédent. Trouver la condition pour que le contour ayant ces points pour sommets successifs se ferme et forme un polygone de r côtés.

On écrit la relation qui existe entre les paramètres de deux sommets consécutifs et l'on exprime que P_r coïncide avec P_0; on trouve que le paramètre de P_0 doit satisfaire à la condition

$$u_0=\frac{2m\omega+2n\omega'}{(-1)^{r-1}2^r+1},$$

mais il faut encore examiner si le polygone correspondant à une solution a bien r côtés.

Par exemple, pour $r=3$ on trouve parmi les solutions les tangentes d'inflexion comptées trois fois.

CHAPITRE IV.

ÉTUDE SPÉCIALE DES NOTATIONS DE JACOBI.

I. — Fonctions de Jacobi.

69. **Objet du Chapitre.** — Les séries et produits à double entrée employés pour définir les éléments σ, ζ, p, Z, H à l'aide desquels on peut exprimer toutes les fonctions elliptiques, peuvent être remplacés, aussi bien dans la notation de M. Weierstrass que dans celle de Jacobi, par des séries à simple entrée beaucoup plus rapidement convergentes.

Nous allons exposer ici les notations de Jacobi : nous avons d'ailleurs montré comment on passe d'un système de notations à l'autre, en donnant la relation entre les fonctions H et σ (n° 40).

70. **Périodes.** — Nous avons déjà dit que le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ des deux périodes doit être imaginaire, sans quoi le réseau des parallélogrammes n'existerait pas. On peut toujours changer le signe de ω ou de ω', car une fonction admettant pour périodes 2ω et $2\omega'$ admet aussi pour périodes -2ω et $2\omega'$ par exemple. Nous pouvons donc choisir les signes des périodes de façon que dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ le coefficient de i soit *positif*; c'est là ce que nous supposerons toujours. Jacobi désigne les périodes par $2\mathrm{K}$ et $2i\mathrm{K}'$; dans le cas particulier où K et K' sont réels, le rapport $\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}$ doit être positif. Nous pourrons employer tantôt l'une tantôt l'autre manière de désigner les périodes : on se rappellera que

$$\omega = \mathrm{K}, \qquad \omega' = i\mathrm{K}'.$$

Si, dans le cas général, on pose

$$q = e^{\frac{\pi\omega' i}{\omega}} = e^{-\frac{\pi\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}},$$

le nombre q a un module *plus petit que l'unité*, car la partie réelle de l'exposant $\frac{\pi\omega' i}{\omega}$ est négative.

71. Développement en série simple de la fonction Zu. Valeur de δ. — La fonction

$$Zu = \frac{H'(u)}{H(u)},$$

construite, comme nous l'avons expliqué, avec les périodes 2ω et $2\omega'$, a pour pôles simples de résidu $+1$ tous les points

$$u = 2m\omega + 2n\omega',$$

où m et n prennent toutes les valeurs entières positives, négatives et nulles.

Nous allons construire cette fonction d'une autre manière, en formant, à l'aide d'une série de cotangentes, une fonction ayant les mêmes pôles et les mêmes résidus que Z. Le point de départ de la méthode réside dans ce fait que la fonction

$$\frac{\pi}{2\omega}\cot\frac{\pi}{2\omega}(u - 2n\omega') + \text{const.},$$

où n est un entier déterminé, a pour pôles simples de résidu $+1$ tous les points

$$u - 2n\omega' = 2m\omega,$$

ou

$$u = 2m\omega + 2n\omega', \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \infty).$$

Considérons la fonction

$$U_n = \frac{\pi}{2\omega}\left[\cot\frac{\pi}{2\omega}(u - 2n\omega') - i\right],$$

où n désigne un entier positif; elle admet comme pôles simples, avec le résidu $+1$, tous les points

$$u = 2n\omega' + 2m\omega \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Cette fonction peut s'écrire

$$U_n = \frac{\pi}{2\omega}\,\frac{\cos\frac{\pi}{2\omega}(u - 2n\omega') - i\sin\frac{\pi}{2\omega}(u - 2n\omega')}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(u - 2n\omega')},$$

ou en introduisant la quantité $q = e^{\frac{\pi\omega' i}{\omega}}$,

$$U_n = \frac{i\pi}{\omega}\,\frac{e^{-\frac{\pi u i}{2\omega}}q^n}{e^{\frac{\pi u i}{2\omega}}q^{-n} - e^{-\frac{\pi u i}{2\omega}}q^n} = \frac{i\pi}{\omega}\,\frac{e^{-\frac{\pi u i}{\omega}}q^{2n}}{1 - e^{-\frac{\pi u i}{\omega}}q^{2n}}.$$

Cette forme de U_n montre que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n,$$

est convergente, à la façon d'une progression géométrique dont la raison serait q^2.

Considérons de même, en supposant maintenant n entier et négatif, la fonction

$$V_n = \frac{\pi}{2\omega}\left[\cot\frac{\pi}{2\omega}(u - 2n\omega') + i\right];$$

elle admet comme pôles, avec le résidu $+1$, tous les points

$$u = 2n\omega' + 2m\omega, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

on peut l'écrire

$$V_n = \frac{i\pi}{\omega}\,\frac{e^{\frac{\pi u i}{\omega}}q^{-2n}}{e^{\frac{\pi u i}{\omega}}q^{-2n} - 1},$$

et l'on voit que la série

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} V_n$$

est convergente.

Nous allons vérifier que la fonction

$$\Phi(u) = \frac{\pi}{2\omega}\cot\frac{\pi u}{2\omega} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2\omega}\left[\cot\frac{\pi}{2\omega}(u - 2n\omega') - i\right]$$
$$+ \sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{\pi}{2\omega}\left[\cot\frac{\pi}{2\omega}(u - 2n\omega') + i\right]$$

est identique à $Z(u)$.

D'abord cette fonction $\Phi(u)$ est impaire comme $Z(u)$; on le vérifie immédiatement en écrivant la série qui donne $\Phi(-u)$: cette série est égale à $-\Phi(u)$. La fonction $\Phi(u)$ a les mêmes pôles et

les mêmes résidus que $Z(u)$. Elle satisfait aux relations

$$\Phi(u+2\omega) = \Phi(u),$$
$$\Phi(u+2\omega') = \Phi(u) - \frac{i\pi}{\omega}.$$

La première de ces relations est évidente, car chaque cotangente admet la période 2ω; la deuxième se trouve en formant la différence

$$\Phi(u+2\omega') - \Phi(u)$$

et remarquant que, dans la différence des deux séries, les termes se détruisent deux à deux sauf deux termes $\frac{i\pi}{2\omega}$.

Considérons alors la fonction

$$\Psi(u) = \Phi(u) - Z(u).$$

Cette fonction est régulière en tous les points à distance finie, car, dans le voisinage d'un point

$$u = 2m\omega + 2n\omega',$$

on a

$$\Phi(u) = \frac{1}{u - 2m\omega - 2n\omega'} + \text{fonction régulière},$$

$$Z(u) = \frac{1}{u - 2m\omega - 2n\omega'} + \text{fonction régulière},$$

et, en retranchant, on voit que $\Psi(u)$ est régulière au point considéré. En outre, d'après les relations que vérifient $\Phi(u)$ et $Z(u)$, on a

$$\Psi(u+2\omega) = \Psi(u),$$
$$\Psi(u+2\omega') = \Psi(u) - \frac{i\pi}{\omega} + \frac{2\delta}{\omega}.$$

En répétant un raisonnement qui a déjà été fait (n° 24) on voit que la fonction $\Psi(u)$ est une constante et de plus que l'on a

$$\delta = \frac{i\pi}{2}.$$

Ainsi

$$\Phi(u) = Z(u) + \text{const}.$$

Cette constante est nulle puisque $\Phi(u)$ et $Z(u)$ sont impaires toutes les deux.

En définitive, on a obtenu pour $Z(u)$ le développement

$$Z(u) = \frac{\pi}{2\omega}\cot\frac{\pi u}{2\omega} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2\omega}\left[\cot\frac{\pi}{2\omega}(u - 2n\omega') - i\right]$$
$$+ \sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{\pi}{2\omega}\left[\cot\frac{\pi}{2\omega}(u - 2n\omega') + i\right].$$

De plus, en se rappelant que l'on a posé $\delta = \eta_1\omega' - \omega\eta_1'$, on voit que l'on a démontré la relation suivante

$$\eta_1\omega' - \omega\eta_1' = \frac{i\pi}{2}.$$

72. **Fonction** H. — Nous avons déjà défini la fonction H comme une fonction dont la dérivée logarithmique est Z. L'expression simple que nous venons de trouver pour Z va nous donner, par intégration, un produit très convergent servant à définir H. Le problème se pose comme il suit :

Trouver la fonction dont la dérivée logarithmique est

$$Z(u) = \frac{\pi}{2\omega}\cot\frac{\pi u}{2\omega} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2\omega}\left[\cot\frac{\pi}{2\omega}(u + 2n\omega') + i\right]$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2\omega}\left[\cot\frac{\pi}{2\omega}(u - 2n\omega') - i\right].$$

Pour écrire le second membre, nous avons, dans une des sommes qui figurent dans Zu, changé n en $-n$.

Si l'on intègre entre o et u le terme

$$\frac{\pi}{2\omega}\left[\cot\frac{\pi}{2\omega}(u + 2n\omega') + i\right],$$

on trouve

$$\operatorname{Log}\frac{\sin\frac{\pi}{2\omega}(u + 2n\omega')}{\sin\frac{n\pi\omega'}{\omega}} + \frac{i\pi u}{2\omega},$$

puis en remontant des logarithmes aux nombres

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2\omega}(u + 2n\omega')}{\sin\frac{n\pi\omega'}{\omega}}\, e^{\frac{i\pi u}{2\omega}},$$

ou bien

$$\frac{\left[e^{\frac{i\pi}{2\omega}(u+2n\omega')} - e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(u+2n\omega')}\right] e^{\frac{i\pi u}{2\omega}}}{e^{i\pi\frac{n\omega'}{\omega}} - e^{-i\pi\frac{n\omega'}{\omega}}},$$

ou enfin, en effectuant au numérateur puis en multipliant les deux termes par $e^{n\frac{i\pi\omega'}{\omega}}$,

$$\frac{1-q^{2n}e^{\frac{i\pi u}{\omega}}}{1-q^{2n}}.$$

On a donc

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2\omega}\left[\cot\frac{\pi}{2\omega}(u+2n\omega')+i\right] = \frac{d}{du}\operatorname{Log}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-q^{2n}e^{\frac{i\pi u}{\omega}}}{1-q^{2n}}.$$

On voit de même que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2\omega}\left[\cot\frac{\pi}{2\omega}(u-2n\omega')-i\right] = \frac{d}{du}\operatorname{Log}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-q^{2n}e^{-\frac{i\pi u}{\omega}}}{1-q^{2n}}.$$

Nous avons ainsi les expressions des deux sommes qui entrent dans $Z(u)$.

D'ailleurs

$$\cot\frac{\pi}{2\omega}u = \frac{d}{du}\operatorname{Log}\sin\frac{\pi u}{2\omega}.$$

Donc on peut écrire

$$Z(u) = \frac{d}{du}\mathrm{H}(u),$$

en posant

$$\mathrm{H}(u) = \mathrm{C}\sin\frac{\pi u}{2\omega}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}e^{\frac{i\pi u}{\omega}}\right)\left(1-q^{2n}e^{-\frac{i\pi u}{\omega}}\right),$$

où C désigne un facteur constant. On trouve enfin, en effectuant le produit des deux facteurs du terme général,

$$\mathrm{H}(u) = \mathrm{C}\sin\frac{\pi u}{2\omega}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-2q^{2n}\cos\frac{\pi u}{\omega}+q^{4n}\right).$$

73. **Développement de $\mathrm{H}(u)$ en série trigonométrique.** — Le produit Π qui figure dans l'expression ci-dessus de $\mathrm{H}(u)$ peut

être ordonné suivant les puissances positives de $\cos\frac{\pi u}{\omega}$; comme une puissance positive de $\cos\frac{\pi u}{\omega}$ est égale à une somme de cosinus des multiples de $\frac{\pi u}{\omega}$, on voit que le produit Π peut être développé en une série de la forme

$$\Pi = c_0 + c_1 \cos\frac{\pi u}{\omega} + c_2 \cos\frac{2\pi u}{\omega} + \dots$$

Pour avoir $H(u)$ il faut multiplier par $A\sin\frac{\pi u}{2\omega}$; on peut, dans le produit obtenu, remplacer chaque terme de la forme

$$\sin\frac{\pi u}{2\omega}\cos\frac{k\pi u}{\omega}$$

par une différence de sinus. On est ainsi conduit pour $H(u)$ à un développement de la forme suivante, où, d'après les notations de Jacobi, nous faisons $\omega = K$, $\omega' = iK'$:

$$H(u) = a_1 \sin\frac{\pi u}{2K} + a_3 \sin\frac{3\pi u}{2K} + \dots + a_{2n+1}\sin(2n+1)\frac{\pi u}{2K} + \dots$$

ou bien, en remplaçant les sinus par des exponentielles :

$$H(u) = A_1 e^{\frac{\pi i u}{2K}} + A_3 e^{\frac{3\pi i u}{2K}} + A_5 e^{\frac{5\pi i u}{2K}} + \dots + A_{2n+1} e^{\frac{(2n+1)\pi i u}{2K}} + \dots$$
$$- A_1 e^{-\frac{\pi i u}{2K}} - A_3 e^{-\frac{3\pi i u}{2K}} - \dots$$

Pour déterminer A_1, A_3, ..., on se sert de la formule (26) du n° 21 où l'on remplace λ par sa valeur $\frac{i\pi}{K}$

$$H(u + 2iK') = -\frac{1}{q} e^{-\frac{\pi i u}{K}} H(u).$$

Or a

$$H(u + 2iK') = A_1 q e^{\frac{\pi i u}{2K}} + A_3 q^3 e^{\frac{3\pi i u}{2K}} + A_5 q^5 e^{\frac{5\pi i u}{2K}} + \dots$$
$$- A_1 \frac{1}{q} e^{-\frac{\pi i u}{2K}} - A_3 \frac{1}{q^3} e^{-\frac{3\pi i u}{2K}} - A_5 \frac{1}{q^5} e^{-\frac{5\pi i u}{2K}} - \dots$$

D'autre part

$$-\frac{1}{q} e^{-\frac{2\pi i u}{2K}} H(u) = -\frac{A_1}{q} e^{-\frac{\pi i u}{2K}} - \frac{A_3}{q} e^{\frac{\pi i u}{2K}} - \frac{A_5}{q} e^{\frac{3\pi i u}{2K}} - \dots$$
$$+ \frac{A_1}{q} e^{-\frac{3\pi i u}{2K}} + \frac{A_3}{q} e^{-\frac{5\pi i u}{2K}} + \dots$$

Identifiant ces deux séries, on a les relations compatibles

$$\frac{1}{q}A_1 = -qA_0,\quad \frac{1}{q}A_2 = -q^3A_1,\quad \ldots,\quad \frac{1}{q}A_n = -q^{2n-1}A_{n-1},\quad \ldots,$$

$$\frac{1}{q}A_0 = -\frac{1}{q^3}A_1,\quad \frac{1}{q}A_1 = -\frac{1}{q^5}A_2,\quad \ldots,\quad \frac{1}{q}A_{n-1} = -\frac{1}{q^{2n+1}}A_n,\quad \ldots,$$

qui se réduisent à

$$A_1 = -q^2A_0,\quad A_2 = -q^4A_1,\quad \ldots,\quad A_n = -q^{2n}A_{n-1},\quad \ldots,$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$A_n = (-1)^n q^{n(n+1)} A_0.$$

On a donc

$$\mathrm{H}(u) = A_0\Sigma(-1)^n q^{n(n+1)}\left[e^{(2n+1)\frac{\pi i u}{2K}} - e^{-(2n+1)\frac{\pi i u}{2K}}\right],$$

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(u) &= \mathrm{B}\Sigma(-1)^n q^{n(n+1)}\sin(2n+1)\frac{\pi u}{2K}\\ &= \mathrm{B}\left[\sin\frac{\pi u}{2K} - q^2\sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots + (-1)^n q^{n(n+1)}\sin(2n+1)\frac{\pi u}{2K} + \ldots\right].\end{aligned}$$

Le coefficient B peut être choisi arbitrairement, car jusqu'ici $\mathrm{H}(u)$ n'a été défini qu'à un facteur constant près. On prend $\mathrm{B} = 2q^{\frac{1}{4}}$ et l'on a pour $\mathrm{H}(u)$ le développement

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(u) = 2q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{\pi u}{2K} &- 2q^{\frac{9}{4}}\sin\frac{3\pi u}{2K} + 2q^{\frac{25}{4}}\sin\frac{5\pi u}{2K} - \ldots\\ &+ (-1)^n 2q^{\frac{4n^2+4n+1}{4}}\sin(2n+1)\frac{\pi u}{2K},\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(u) = 2\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi u}{2K} &- 2\sqrt[4]{q^9}\sin\frac{3\pi u}{2K} + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin\frac{5\pi u}{2K} - \ldots\\ &+ (-1)^n 2\sqrt[4]{q^{(2n+1)^2}}\sin(2n+1)\frac{\pi u}{2K}.\end{aligned}$$

Cette série converge très rapidement, plus rapidement qu'une progression géométrique, car les exposants de $q^{\frac{1}{4}}$ croissent comme les carrés des nombres entiers.

Quand il sera nécessaire d'indiquer les périodes avec lesquelles est construite la fonction $\mathrm{H}(u)$ nous écrirons cette fonction $\mathrm{H}(u \mid K, iK')$, notation analogue à celle que nous avons employée pour σu en écrivant $\sigma(u \mid \omega, \omega')$.

74. **Fonctions H, H_1, Θ, $Θ_1$ de Jacobi.** — Nous avons vu que σu et $H(u)$ sont analogues à $\frac{2\omega}{\pi}\sin\frac{\pi u}{2\omega}$ tandis que pu est analogue à $\frac{\pi^2}{4\omega^2}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi u}{2\omega}}$. En Trigonométrie on introduit, en même temps que ces fonctions, celles qu'on en déduit en ajoutant à l'argument u une constante ω égale à la moitié de la période 2ω, et l'on pose

$$\cos\frac{\pi u}{2\omega} = \sin\frac{\pi}{2\omega}(u+\omega).$$

De même, à côté de la fonction $H(u)$ construite avec les périodes $2K$ et $2iK'$, on considère les fonctions obtenues en ajoutant successivement à l'argument u les demi-périodes K, K' et $K+iK'$, ou du moins des fonctions qui ne diffèrent de celles-là que par des facteurs exponentiels simples.

En désignant par λ l'exponentielle

$$\lambda = e^{-\frac{i\pi}{4K}(2u+iK')},$$

linéaire en u, on définit les fonctions H_1, Θ, $Θ_1$ par les égalités

$$(1)\qquad \begin{cases} H_1(u) = H(u+K), \\ \Theta(u) \;= \dfrac{1}{i\lambda}H(u+iK'), \\ \Theta_1(u) = \dfrac{1}{\lambda}H(u+K+iK'); \end{cases}$$

les deux dernières montrent immédiatement que

$$(2)\qquad \Theta_1(u) = \Theta(u+K),$$

car, si l'on ajoute K à u, λ se reproduit multiplié par $-i$.

Voici quelques détails sur les expressions de ces fonctions par des séries.

Tout d'abord la formule

$$H_1(u) = H(u+K)$$

donne, pour définir $H_1(u)$, la série

$$H_1(u) = 2\sqrt[4]{q}\cos\frac{\pi u}{2K} + 2\sqrt[4]{q^9}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots + 2\sqrt[4]{q^{(2n+1)^2}}\cos\frac{(2n+1)\pi u}{2K} + \ldots,$$

ou en remplaçant les cosinus par des exponentielles et en remarquant que $-(2n+1) = 2(-n-1)+1$

$$\mathrm{H}_1(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{\frac{(2n+1)^2}{4}} e^{(2n+1)\frac{i\pi u}{2K}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\frac{K'}{K}\frac{(2n+1)^2}{4}+(2n+1)\frac{i\pi u}{2K}}.$$

On peut encore donner une autre forme à cette série en considérant l'exposant de e qui est du second degré en $(2n+1)$, comme formé par les deux derniers termes du développement de

$$\frac{\pi}{4KK'}[u+(2n+1)iK']^2.$$

On a ainsi

$$\mathrm{H}_1(u) = e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi}{4KK'}[u+(2n+1)iK']^2}.$$

Passons maintenant à la fonction Θ_1. On a par définition

$$\Theta_1(u) = \frac{1}{\lambda}\mathrm{H}(u+K+iK') = \frac{1}{\lambda}\mathrm{H}_1(u+iK').$$

Or

$$\mathrm{H}_1(u+iK') = e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}-\frac{i\pi}{4K}(2u+iK')} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi}{4KK'}[u+(2n+2)iK']^2}.$$

Dans la nouvelle série le nombre pair $(2n+2)$ prend toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$; on peut le remplacer par $2n$, on trouve alors

$$\Theta_1(u) = e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi}{4KK'}(u+2niK')^2},$$

série analogue à celle qui définit $\mathrm{H}_1(u)$, mais où figure, dans le terme général, un nombre pair $2n$ à la place de $(2n+1)$.

Quand on augmente u de iK' les sommes qui figurent dans les expressions de $\mathrm{H}_1(u)$ et $\Theta_1(u)$ s'échangent l'une dans l'autre. Il en est donc de même pour $\mathrm{H}_1(u)$ et $\Theta_1(u)$, à un facteur près provenant de l'accroissement de l'exposant de $e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}}$. On vérifie ainsi les égalités suivantes qui résultent aussi des équations (1)

$$\mathrm{H}_1(u+iK') = e^{-\frac{i\pi}{4K}(2u+iK')}\,\Theta_1(u) = \lambda\,\Theta_1(u),$$

$$\Theta_1(u+iK') = e^{-\frac{i\pi}{4K}(2u+iK')}\,\mathrm{H}_1(u) = \lambda\,\mathrm{H}_1(u).$$

La série qui définit la fonction $\Theta_1(u)$ peut s'écrire en effectuant la multiplication de chaque terme du second membre par $e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}}$

$$\Theta_1(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{\frac{ni\pi u}{K}},$$

ou, en associant les termes qui correspondent à deux valeurs de n égales et de signes contraires

$$\Theta_1(u) = 1 + 2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} + \ldots + 2q^{n^2}\cos\frac{n\pi u}{K} + \ldots.$$

Enfin, la quatrième fonction $\Theta(u)$ peut se définir au moyen de l'égalité

$$\Theta(u) = \Theta_1(u + K);$$

on a donc

$$\Theta(u) = 1 - 2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} + \ldots + (-1)^n q^{n^2}\cos\frac{n\pi u}{K} + \ldots.$$

Il résulte de ces développements que, la fonction $H(u)$ seule est *impaire*, les trois autres sont *paires*

$$H(-u) = -H(u), \qquad H_1(-u) = H_1(u),$$
$$\Theta(-u) = \Theta(u), \qquad \Theta_1(-u) = \Theta_1(u).$$

75. **Zéros des fonctions** H, H_1, Θ, Θ_1. — Les zéros de $H(u)$ sont connus. Ceux des trois autres fonctions s'en déduisent immédiatement d'après les égalités (1) qui définissent ces fonctions à l'aide de $H(u)$.

Les résultats sont donnés par le Tableau suivant dans lequel on a inscrit, en face de chaque fonction, l'expression générale de ses zéros et où m et n désignent des nombres entiers

$H(u)$,	$2mK + 2niK'$,
$H_1(u)$,	$(2m+1)K + 2niK'$,
$\Theta(u)$,	$2mK + (2n+1)iK'$,
$\Theta_1(u)$,	$(2m+1)K + (2n+1)iK'$.

76. **Formules relatives à l'addition d'une période ou d'une demi-période.** — Considérons, en premier lieu, la période $2K$ et sup-

posons qu'on ajoute cette période à l'argument, on a d'abord

$$\mathrm{H}(u+2\mathrm{K}) = -\mathrm{H}(u),$$

comme cela résulte des développements de $\mathrm{H}u$ en série simple ou en produit simplement infini, développements qui ne dépendent que des sinus et cosinus des multiples de $\frac{\pi u}{2\mathrm{K}}$.

Les égalités qui définissent, à l'aide de H, les trois autres fonctions donnent le résultat correspondant pour ces fonctions; on trouve ainsi

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}(u+2\mathrm{K}) &= -\mathrm{H}(u),\\
\mathrm{H}_1(u+2\mathrm{K}) &= -\mathrm{H}_1(u),\\
\Theta(u+2\mathrm{K}) &= \Theta(u),\\
\Theta_1(u+2\mathrm{K}) &= \Theta_1(u).
\end{aligned}$$

Si l'on ajoute seulement la demi-période K on a d'abord par définition

$$\mathrm{H}(u+\mathrm{K}) = \mathrm{H}_1(u), \qquad \Theta(u+\mathrm{K}) = \Theta_1(u),$$

et, en tenant compte des résultats précédents, on trouve

$$\mathrm{H}_1(u+\mathrm{K}) = -\mathrm{H}(u), \qquad \Theta_1(u+\mathrm{K}) = \Theta(u).$$

Réunissons ces formules

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}(u+\mathrm{K}) &= \mathrm{H}_1(u),\\
\mathrm{H}_1(u+\mathrm{K}) &= -\mathrm{H}(u),\\
\Theta(u+\mathrm{K}) &= \Theta_1(u),\\
\Theta_1(u+\mathrm{K}) &= \Theta(u).
\end{aligned}$$

Considérons maintenant la période $2i\mathrm{K}'$. Les résultats s'obtiennent aisément pour Θ_1 et H_1 en se servant des développements

$$\Theta_1(u) = e^{-\frac{\pi u^2}{4\mathrm{K}\mathrm{K}'}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{\mathrm{K}\mathrm{K}'}(u+2ni\mathrm{K}')^2},$$

$$\mathrm{H}_1(u) = e^{-\frac{\pi u^2}{4\mathrm{K}\mathrm{K}'}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi}{4\mathrm{K}\mathrm{K}'}[u+(2n+1)i\mathrm{K}']^2}.$$

Si l'on augmente de $2i\mathrm{K}'$ l'argument, chacune des fonctions Θ_1, H_1 se reproduit multipliée par le même facteur que l'expo-

nentielle

$$e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}}.$$

Désignons par μ ce multiplicateur, c'est-à-dire posons

$$\mu = e^{-\frac{i\pi}{K}(u+iK')},$$

nous aurons

$$\Theta_1(u+2iK') = \mu\,\Theta_1(u), \qquad H_1(u+2iK') = \mu\,H_1(u).$$

Pour passer de là aux fonctions Θ et H, il suffit de diminuer l'argument de K dans les formules précédentes : $\Theta_1(u)$ et $H_1(u)$ deviennent respectivement $\Theta(u)$ et $+H(u)$, μ se reproduit multiplié par $e^{i\pi}$, c'est-à-dire -1, et il vient

$$\Theta(u+2iK') = -\mu\,\Theta(u), \qquad H(u+2iK') = -\mu\,H_1(u).$$

Réunissons ces formules

$$\left.\begin{aligned} \Theta_1(u+2iK') &= \mu\,\Theta_1(u), \\ H_1(u+2iK') &= \mu\,H_1(u), \\ \Theta(u+2iK') &= -\mu\,\Theta(u), \\ H(u+2iK') &= -\mu\,H(u), \end{aligned}\right\} \qquad \mu = e^{-\frac{i\pi}{K}(u+iK')}.$$

Si l'on ajoute la demi-période iK', nous avons vu (nº 74) que les fonctions Θ_1, H_1 s'échangent à un facteur près λ défini par

$$\lambda = e^{-\frac{i\pi}{4K}(2u+iK')};$$

λ est le multiplicateur de l'exponentielle $e^{-\frac{\pi}{4KK'}u^2}$ correspondant à l'accroissement iK' de l'argument u.

Si, dans les formules ainsi obtenues, on retranche K de l'argument, et si l'on remarque que λ se reproduit multiplié par i, on trouve les formules correspondantes pour Θ et H. On a ainsi

$$\left.\begin{aligned} \Theta_1(u+iK') &= \lambda\,H_1(u), \\ H_1(u+iK') &= \lambda\,\Theta_1(u), \\ \Theta(u+iK') &= i\lambda\,H(u), \\ H(u+iK') &= i\lambda\,\Theta(u), \end{aligned}\right\} \qquad \lambda = e^{-\frac{i\pi}{4K}(2u+iK')}.$$

Enfin, si l'on veut ajouter la demi-période $K+iK'$, il suffit dans les formules précédentes d'ajouter K à l'argument, ce qui

donne

$$\begin{aligned} \Theta_1(u+K+iK') &= i\lambda\, H(u), \\ H_1(u+K+iK') &= -i\lambda\, \Theta(u), \\ \Theta(u+K+iK') &= \lambda\, H_1(u), \\ H(u+K+iK') &= \lambda\, \Theta_1(u), \end{aligned} \qquad \lambda = e^{-\frac{i\pi}{4K}(2u+iK')}.$$

77. **Addition d'un nombre entier de périodes.** — Supposons d'abord que l'on ajoute $2nK$ à l'argument; cela revient à ajouter n fois successivement $2K$ et, comme le signe de la fonction peut seul changer, le résultat se déduit immédiatement des formules relatives à l'addition de $2K$.

Supposons maintenant qu'on ajoute $2miK'$, on pourrait encore ajouter successivement m fois $2iK'$; mais on peut obtenir de suite le résultat en remarquant que chacune des fonctions Θ_1 et H_1 est égale (n° 74) à une fonction admettant la période $2iK'$ multipliée par l'exponentielle

$$e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}}.$$

D'après cela

$$H_1(u+2miK') = e^{-\frac{mi\pi}{K}(u+miK')}\, H_1(u),$$

$$\Theta_1(u+2miK') = e^{-\frac{mi\pi}{K}(u+miK')}\, \Theta_1(u);$$

en remplaçant dans ces formules u par $u-K$, on trouve

$$H(u+2miK') = (-1)^m e^{-\frac{mi\pi}{K}(u+miK')}\, H(u),$$

$$\Theta(u+2miK') = (-1)^m e^{-\frac{mi\pi}{K}(u+miK')}\, \Theta(u).$$

Enfin, on démontrerait de même

$$H_1[u+(2m+1)iK'] = e^{-\frac{(2m+1)i\pi}{4K}[2u+(2m+1)iK']}\, \Theta_1(u),$$

$$\Theta_1[u+(2m+1)iK'] = e^{-\frac{(2m+1)i\pi}{4K}[2u+(2m+1)iK']}\, H_1(u),$$

$$H[u+(2m+1)iK'] = (-1)^m i e^{-\frac{(2m+1)i\pi}{4K}[2u+(2m+1)iK']}\, \Theta(u).$$

$$\Theta[u+(2m+1)iK'] = (-1)^m i e^{-\frac{(2m+1)i\pi}{4K}[2u+(2m+1)iK']}\, H(u).$$

78. **Développements de H_1, Θ, Θ_1 en produits infinis simples.** — Ces développements se déduisent du développement de $H(u)$

obtenu plus haut par l'intégration de la série de cotangentes qui donne $Z(u)$. Nous avons trouvé (n° 72)

$$H(u) = C \sin \frac{\pi u}{2K} \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 - q^{2n} e^{\frac{i\pi u}{K}}\right)\left(1 - q^{2n} e^{-\frac{i\pi u}{K}}\right).$$

Cherchons d'abord le développement de la fonction

$$\Theta(u) = \frac{1}{i} \sqrt[4]{q}\, e^{-\frac{i\pi u}{2K}} H(u + iK').$$

Quand on ajoute iK' à l'argument u, l'exponentielle $e^{\frac{i\pi u}{K}}$ se reproduit multipliée par q; le facteur

$$\sin \frac{\pi u}{2K} = \frac{e^{\frac{i\pi u}{2K}} - e^{-\frac{i\pi u}{2K}}}{2i}$$

devient

$$\frac{1}{2i\sqrt{q}} \left(q e^{\frac{i\pi u}{2K}} - e^{-\frac{i\pi u}{2K}}\right),$$

et l'on obtient

$$\Theta(u) = -\frac{C}{2\sqrt[4]{q}} \left(q e^{\frac{i\pi u}{K}} - 1\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - q^{2n+1} e^{\frac{i\pi u}{K}}\right)\left(1 - q^{2n-1} e^{-\frac{i\pi u}{K}}\right).$$

Si l'on fait entrer dans le produit le premier facteur, on voit que les facteurs contenant $e^{\frac{i\pi u}{K}}$ sont de la forme $1 - q^{2n+1} e^{\frac{i\pi u}{K}}$ où n varie de 0 à ∞, et les facteurs contenant $e^{-\frac{i\pi u}{K}}$ de la forme $1 - q^{2n+1} e^{-\frac{i\pi u}{K}}$, où n varie également de 0 à ∞. On a donc, en posant pour abréger $\frac{C}{2\sqrt[4]{q}} = A$

$$\begin{aligned} \Theta(u) &= A \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - q^{2n+1} e^{\frac{i\pi u}{K}}\right)\left(1 - q^{2n+1} e^{-\frac{i\pi u}{K}}\right) \\ &= A\left(1 - 2q \cos \frac{\pi u}{K} + q^2\right)\left(1 - 2q^3 \cos \frac{\pi u}{K} + q^6\right)\cdots, \end{aligned}$$

Les développements en produit de H_1 et de Θ_1 s'obtiennent immédiatement en changeant u en $u + K$ dans les développements ci-dessus de H et de Θ.

Le facteur A n'est pas arbitraire puisque, dans les développements en séries trigonométriques des fonctions H, H_1, Θ, Θ_1, les coefficients sont complètement déterminés. Ainsi, en identifiant les développements de Θ_1 en produit et en série, on doit avoir, quel que soit x,

$$\begin{aligned} &A(1+2q\cos 2x+q^2)(1+2q^3\cos 2x+q^6)\ldots \\ &\quad = 1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\ldots. \end{aligned}$$

On aurait une première expression de A en faisant $x=0$ dans cette identité. Jacobi a montré que l'expression ainsi obtenue peut être remplacée par la suivante :

$$A = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots.$$

Nous admettrons ici ce résultat. On verra, dans une Note placée à la fin du Volume, comment on peut transformer le produit infini pour obtenir la série trigonométrique et comment se présente, dans ce calcul, l'expression de A donnée par Jacobi.

Nous réunissons ici les développements en produits simplement infinis des quatre fonctions. En posant

$$\begin{aligned} A &= (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots, \\ H\left(\frac{2Ku}{\pi}\right) &= A\,2\sqrt[4]{q}\,\sin u(1-2q^2\cos 2u+q^4)(1-2q^4\cos 2u+q^8)\ldots, \\ H_1\left(\frac{2Ku}{\pi}\right) &= A\,2\sqrt[4]{q}\,\cos u(1+2q^2\cos 2u+q^4)(1+2q^4\cos 2u+q^8)\ldots. \\ \Theta\left(\frac{2Ku}{\pi}\right) &= A(1-2q\cos 2u+q^2)(1-2q^3\cos 2u+q^6)\ldots. \\ \Theta_1\left(\frac{2Ku}{\pi}\right) &= A(1+2q\cos 2u+q^2)(1+2q^3\cos 2u+q^6)\ldots. \end{aligned}$$

79. **Relation** $\frac{2K}{\pi}H'(0) = H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)$. — Cette relation, sur laquelle nous aurons à nous appuyer, se vérifie très simplement à l'aide des développements en produits infinis qui précèdent, en suivant une méthode donnée par M. Hermite (voir *Note sur les fonctions elliptiques*, à la fin de l'Analyse de *Serret*, p. 791 et 798).

On a immédiatement

$$\begin{aligned} H_1(0) &= 2\sqrt[4]{q}\,AP^2, \\ \Theta(0) &= AQ^2, \\ \Theta_1(0) &= AR^2, \end{aligned}$$

en posant pour abréger

$$\begin{aligned} P &= (1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots, \\ Q &= (1-q)\,(1-q^3)(1-q^5)\ldots, \\ R &= (1+q)\,(1+q^3)(1+q^5)\ldots. \end{aligned}$$

D'après la relation suivante due à Euler

$$\begin{aligned} (1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots &= \frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}\cdots \\ &= \frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)}\cdots, \end{aligned}$$

on voit que l'on a

$$PR = \frac{1}{Q},$$

ou bien

$$PQR = 1.$$

D'après cela

$$H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0) = 2\sqrt[4]{q}\,A^3.$$

Calculons maintenant $H'(0)$ en regardant $H\left(\frac{2Ku}{\pi}\right)$ comme un produit de deux facteurs dont l'un serait $\sin u$, nous trouverons

$$\frac{2K}{\pi}H'(0) = A\,2\sqrt[4]{q}\,(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^6)^2\ldots = 2\sqrt[4]{q}\,A^3.$$

On a donc bien l'égalité qu'il s'agissait de démontrer

$$\frac{2K}{\pi}H'(0) = H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0).$$

Remarque. — Les expressions précédentes de $H_1(0)$, $\Theta_1(0)$, $\Theta(0)$ montrent que $\sqrt[4]{k}$ et $\sqrt[4]{k'}$, définies plus loin (n° 83), sont des fonctions uniformes de la variable $\tau = \frac{K'}{K}$, et la relation $PQR = 1$ permet de montrer que ce sont des fonctions de q régulières pour toutes les valeurs de q dont le module est moindre que 1.

80. **Formules relatives à l'échange de K et K'.** — Dans la notation de Weierstrass nous avons vu que les fonctions $\sigma(iu|\omega, \omega')$, $p(iu|\omega, \omega')$ peuvent s'exprimer à l'aide des fonctions

$$\sigma\left(u\left|\frac{\omega'}{i}, i\omega\right.\right), \qquad p\left(u\left|\frac{\omega'}{i}, i\omega\right.\right).$$

Comme actuellement nous posons

$$\omega = \mathrm{K}, \qquad \omega' = i\mathrm{K}',$$

on a

$$\frac{\omega'}{i} = \mathrm{K}', \qquad i\omega = i\mathrm{K};$$

on passe donc des premières fonctions aux deuxièmes en permutant K et K'. Nous allons établir des formules du même genre pour les fonctions de Jacobi.

Convenons de désigner par $\mathrm{H}(u \mid \mathrm{K}, i\mathrm{K}')$ la fonction H construite comme plus haut avec les deux périodes $2\mathrm{K}$ et $2i\mathrm{K}'$. Cette fonction s'exprime d'une manière simple à l'aide de la fonction H construite avec les périodes $2\mathrm{K}'$ et $2i\mathrm{K}$, $\mathrm{H}(u \mid \mathrm{K}', i\mathrm{K})$. Comme on a supposé la partie réelle de $\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}$ positive, il en est de même de la partie réelle de $\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}'}$; la quantité

$$q_0 = e^{-\pi \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}'}}$$

a donc un module plus petit que l'unité, et la fonction $\mathrm{H}(u \mid \mathrm{K}'. i\mathrm{K})$ est

$$\mathrm{H}(u \mid \mathrm{K}', i\mathrm{K}) = 2\sqrt[4]{q_0}\sin\frac{\pi u}{2\mathrm{K}'} - 2\sqrt[4]{q_0^9}\sin\frac{3\pi u}{2\mathrm{K}'} + \ldots.$$

Cette dernière fonction vérifie les deux relations

$$\mathrm{H}(u + 2\mathrm{K}' \mid \mathrm{K}', i\mathrm{K}) = -\,\mathrm{H}(u \mid \mathrm{K}', i\mathrm{K}),$$

$$\mathrm{H}(u + 2i\mathrm{K} \mid \mathrm{K}', i\mathrm{K}) = -\,e^{-\frac{i\pi}{\mathrm{K}'}(u + i\mathrm{K})}\,\mathrm{H}(u \mid \mathrm{K}', i\mathrm{K}),$$

obtenues en échangeant K et K' dans les formules relatives à l'addition d'une période, vérifiées par la fonction $\mathrm{H}(u)$ ou $\mathrm{H}(u \mid \mathrm{K}, i\mathrm{K}')$.

Ceci posé, dans le produit

$$e^{\frac{\pi u^2}{4\mathrm{K}\mathrm{K}'}}\,\mathrm{H}(u \mid \mathrm{K}, i\mathrm{K}'),$$

analogue à ceux que nous avons considérés déjà à propos de H_1 et de Θ_1 remplaçons u par iu; soit $f(u)$ la fonction ainsi obtenue

$$f(u) = e^{-\frac{\pi u^2}{4\mathrm{K}\mathrm{K}'}}\,\mathrm{H}(iu \mid \mathrm{K}, i\mathrm{K}').$$

On vérifie aisément les deux égalités suivantes, conséquences des relations fondamentales de la fonction H,

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} f(u+2K') = -f(u), \\ f(u+2iK) = -e^{-\frac{i\pi}{K'}(u+iK)} f(u). \end{cases}$$

Ces relations sont identiques à celles que vérifie $H(u|K', iK)$. En outre, les deux fonctions $f(u)$ et $H(u|K', iK)$ ont les mêmes zéros, savoir les valeurs de u données par la formule

$$iu = 2mK + 2niK',$$

ou bien

$$u = -2miK + 2nK',$$

m et n désignant des nombres entiers.

D'après cela, le rapport

$$\frac{f(u)}{H(u|K', iK)}$$

est une fonction doublement périodique aux périodes $2K$ et $2iK'$ et, d'autre part, cette fonction est partout finie : elle se réduit donc à une constante. Désignons cette constante par Ai. Nous avons l'identité

$$e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}} H(iu|K, iK') = Ai\, H(u|K', iK);$$

on en déduit les suivantes :

$$e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}} \Theta(iu|K, iK') = A\, H_1(u|K', iK),$$
$$e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}} \Theta_1(iu|K, iK') = A\ \ \Theta_1(u|K', iK),$$
$$e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}} H_1(iu|K, iK') = A\ \ \Theta(u|K', iK).$$

Il suffit pour cela de remplacer dans la première de ces identités u par $u+K'$, dans la deuxième u par $u+iK$, dans la troisième u par $u+K'$, en se reportant aux formules du n° 76 et à celles qu'on en déduit par l'échange de K et K'.

81. **Diverses notations usitées pour les fonctions de Jacobi.** — M. Weierstrass emploie les notations suivantes reproduites dans

le *Traité des fonctions elliptiques* de Halphen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_1(v) &= 2\sqrt[4]{q}\,\sin\pi v - 2\sqrt[4]{q^9}\,\sin 3\pi v + 2\sqrt[4]{q^{25}}\,\sin 5\pi v - \ldots,\\
\mathfrak{S}_2(v) &= 2\sqrt[4]{q}\,\cos\pi v + 2\sqrt[4]{q^9}\,\cos 3\pi v + 2\sqrt[4]{q^{25}}\,\cos 5\pi v + \ldots,\\
\mathfrak{S}_3(v) &= 1 + 2q\cos 2\pi v + 2q^4\cos 4\pi v + 2q^9\cos 6\pi v + \ldots,\\
\mathfrak{S}_0(v) &= 1 - 2q\cos 2\pi v + 2q^4\cos 4\pi v - 2q^9\cos 6\pi v - \ldots,
\end{aligned}$$

où

$$q = e^{i\pi\tau}, \qquad \tau = \frac{\omega'}{\omega}.$$

On a seulement conservé ici la lettre q au lieu de la lettre h qu'emploie M. Weierstrass pour désigner $e^{i\pi\tau}$.

La correspondance entre les deux notations est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}(u) &= \mathfrak{S}_1\left(\frac{u}{2\mathrm{K}}\right),\\
\mathrm{H}_1(u) &= \mathfrak{S}_2\left(\frac{u}{2\mathrm{K}}\right),\\
\Theta_1(u) &= \mathfrak{S}_3\left(\frac{u}{2\mathrm{K}}\right),\\
\Theta(u) &= \mathfrak{S}_0\left(\frac{u}{2\mathrm{K}}\right).
\end{aligned}$$

Jacobi, dans ses Leçons (*Jacobi's gesammelte Werke*, t. I, p. 497), met $\mathfrak{S}_\alpha(u, q)$ où l'on mettrait, avec la notation de M. Weierstrass, $\mathfrak{S}_\alpha\left(\frac{u}{\pi}\right)$ et supprime l'indice o. Briot et Bouquet désignent les périodes $2\mathrm{K}$ et $2i\mathrm{K}'$ par ω et ω'; ils emploient d'autres notations reliées à celles de Jacobi et à celles de Weierstrass par les formules

$$\begin{aligned}
\theta_1(u) &= \mathfrak{S}_1\left(\frac{u}{2\mathrm{K}}\right) = \mathrm{H}(u),\\
\theta_2(u) &= \mathfrak{S}_2\left(\frac{u}{2\mathrm{K}}\right) = \mathrm{H}_1(u),\\
\theta_3(u) &= \mathfrak{S}_3\left(\frac{u}{2\mathrm{K}}\right) = \Theta_1(u),\\
\theta(u) &= \mathfrak{S}_0\left(\frac{u}{2\mathrm{K}}\right) = \Theta(u).
\end{aligned}$$

82. **Relations entre les σ et les $\mathfrak{S}$.** — Ces relations sont

$$\sigma(u) = \frac{\mathrm{H}(u)}{\mathrm{H}'(0)} e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2},$$

$$\sigma_1(u) = \frac{\sigma(\omega+u)}{\sigma(\omega)} e^{-\eta u} = \frac{\mathrm{H}_1(u)}{\mathrm{H}_1(0)} e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2},$$

$$\sigma_2(u) = \frac{\sigma(\omega+\omega'+u)}{\sigma(\omega+\omega')} e^{-(\eta+\eta')u} = \frac{\Theta_1(u)}{\Theta_1(0)} e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2},$$

$$\sigma_3(u) = \frac{\sigma(\omega'+u)}{\sigma(\omega')} e^{-\eta' u} = \frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2},$$

ou bien

$$e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2} \sigma u = 2\omega \frac{\mathfrak{S}_1(v)}{\mathfrak{S}'_1(0)},$$

$$e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2} \sigma_1(u) = \frac{\mathfrak{S}_2(v)}{\mathfrak{S}_2(0)}, \qquad v = \frac{u}{2\omega},$$

$$e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2} \sigma_2(u) = \frac{\mathfrak{S}_3(v)}{\mathfrak{S}_3(0)},$$

$$e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2} \sigma_3(u) = \frac{\mathfrak{S}_0(v)}{\mathfrak{S}_0(0)}.$$

La première de ces relations a été démontrée (n° 21). Les autres s'en déduisent en tenant compte des formules relatives à l'addition d'une demi-période, et en remarquant que σ_1, σ_2, σ_3 deviennent égales à 1 pour $u = 0$.

II. — Fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$.

83. **Définitions.** — Si l'on compare les multiplicateurs des fonctions $\mathrm{H}(u)$ et $\Theta(u)$ qui correspondent à la période $2\mathrm{K}$, puis à la période $2i\mathrm{K}'$, on voit que les premiers sont égaux et de signe contraire, les derniers égaux et de même signe; il en résulte que le quotient $\dfrac{\mathrm{H}(u)}{\Theta(u)}$ admet pour les mêmes périodes les multiplicateurs -1 et $+1$.

Jacobi a été conduit à considérer les quotients des fonctions H, H_1, Θ_1 par la fonction Θ. Posons

$$\operatorname{sn} u = \mathrm{A}\frac{\mathrm{H}(u)}{\Theta(u)},$$

$$\operatorname{cn} u = \mathrm{B}\frac{\mathrm{H}_1(u)}{\Theta(u)},$$

$$\operatorname{dn} u = \mathrm{C}\frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)}.$$

(On lit les premiers membres s, n, u puis c, n, u puis enfin d, n, u en énonçant successivement les trois lettres.) Déterminons les facteurs constants A, B, C, de manière que les trois fonctions prennent la valeur 1 la première pour $u = \mathrm{K}$, les deux autres pour $u = 0$; nous aurons les égalités suivantes de définition

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\mathrm{H}(u)}{\Theta(u)},$$

$$\operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\mathrm{H}_1(u)}{\Theta(u)}, \qquad \sqrt{k} = \frac{\mathrm{H}(\mathrm{K})}{\Theta(\mathrm{K})} = \frac{\mathrm{H}_1(0)}{\Theta_1(0)},$$

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{k'} \frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)}, \qquad \sqrt{k'} = \frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)}.$$

La fonction $\operatorname{sn} u$ est seule *impaire*, les deux autres sont paires

$$\operatorname{sn}(-u) = -\operatorname{sn} u, \qquad \operatorname{cn}(-u) = \operatorname{cn} u, \qquad \operatorname{dn}(-u) = \operatorname{dn} u.$$

Cela résulte de ce que $\mathrm{H}(u)$ seule est impaire, n° 74.

84. **Addition d'une période ou d'une demi-période.** — Les formules relatives aux fonctions H, H_1, Θ, Θ_1 donnent immédiatement

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(u + 2\mathrm{K}) &= -\operatorname{sn} u, & \operatorname{sn}(u + 2i\mathrm{K}') &= \operatorname{sn} u, \\ \operatorname{cn}(u + 2\mathrm{K}) &= -\operatorname{cn} u, & \operatorname{cn}(u + 2i\mathrm{K}') &= -\operatorname{cn} u, \\ \operatorname{dn}(u + 2\mathrm{K}) &= \operatorname{dn} u, & \operatorname{dn}(u + 2i\mathrm{K}') &= -\operatorname{dn} u, \end{aligned}$$

puis

$$\operatorname{sn}(u + \mathrm{K}) = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}, \qquad \operatorname{sn}(u + i\mathrm{K}') = \frac{1}{k \operatorname{sn} u},$$

$$\operatorname{cn}(u + \mathrm{K}) = \frac{-k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}, \qquad \operatorname{cn}(u + i\mathrm{K}') = \frac{\operatorname{dn} u}{ik \operatorname{sn} u},$$

$$\operatorname{dn}(u + \mathrm{K}) = \frac{k'}{\operatorname{dn} u}, \qquad \operatorname{dn}(u + i\mathrm{K}') = \frac{\operatorname{cn} u}{i \operatorname{sn} u},$$

$$\operatorname{sn}(u + \mathrm{K} + i\mathrm{K}') = \frac{\operatorname{dn} u}{k \operatorname{cn} u},$$

$$\operatorname{cn}(u + \mathrm{K} + i\mathrm{K}') = \frac{k'}{ik \operatorname{cn} u},$$

$$\operatorname{dn}(u + \mathrm{K} + i\mathrm{K}') = \frac{ik' \operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}.$$

85. **Construction, à l'aide des fonctions sn, cn, dn des fonctions elliptiques aux périodes 2ω et $2\omega'$ ou $2\mathrm{K}$ et $2i\mathrm{K}'$.** — Les fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ n'admettent pas les deux périodes $2\mathrm{K}$ et $2i\mathrm{K}'$; par

exemple $\operatorname{sn} u$ change de signe quand u augmente de $2K$. Mais il est aisé de construire avec ces fonctions des fonctions elliptiques admettant ces deux périodes : telles sont, par exemple, les deux fonctions

$$\operatorname{sn}^2 u, \quad \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,$$

et, en général, toute fonction rationnelle de ces deux fonctions.

Inversement, nous verrons plus loin que toute fonction elliptique aux périodes $2K$ et $2iK'$ peut s'exprimer rationnellement à l'aide de ces deux fonctions.

Avec les fonctions de Jacobi on peut donc, tout comme avec les fonctions p et p', construire toutes les fonctions elliptiques aux périodes $2K$ et $2iK'$.

86. **Périodicité; zéros; pôles des fonctions** sn, cn, dn. — Les périodes des trois fonctions se déduisent immédiatement des relations (1)

$\operatorname{sn} u$ admet les deux périodes....... $4K$ et $2iK'$,
$\operatorname{cn} u$ » » .... $4K$ et $2K + 2iK'$,
$\operatorname{dn} u$ » » .... $2K$ et $4iK'$.

Les *zéros* de ces fonctions sont respectivement ceux de $H(u)$, $H_1(u)$, $\Theta_1(u)$ à savoir

Zéros de $\operatorname{sn} u$......... $2mK + 2niK'$,
» $\operatorname{cn} u$......... $(2m+1)K + 2niK'$,
» $\operatorname{dn} u$......... $(2m+1)K + (2n+1)iK'$:

ce sont tous des zéros *simples*.

Les *pôles* des trois fonctions sont les mêmes : ce sont les zéros du dénominateur commun $\Theta(u)$.

Pôles de $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ et $\operatorname{dn} u$... $2mK + (2n+1)iK'$.

Ces pôles sont simples.

Si l'on construit le réseau des parallélogrammes ayant pour sommets les points

$$u_0 + 2mK + 2niK',$$

chacune des trois fonctions a un pôle et un zéro dans chaque parallélogramme.

87. **Formule d'addition préliminaire.** — Nous obtiendrons immédiatement les formules que nous avons en vue, en appliquant les théorèmes généraux, sur les fonctions elliptiques, précédemment établis.

Considérons les deux fonctions

$$(5) \qquad \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u-\alpha), \quad \operatorname{cn} u \operatorname{cn}(u-\alpha) - \operatorname{cn}\alpha,$$

où α désigne une constante. Ces deux fonctions sont doublement périodiques aux périodes $2K$ et $2iK'$. Elles sont chacune du second ordre, car elles admettent dans un parallélogramme des périodes deux pôles simples, à savoir les zéros du produit

$$\Theta(u)\,\Theta(u-\alpha),$$

dont chaque facteur a un seul zéro dans un parallélogramme. Les fonctions (5) ont donc dans un parallélogramme des périodes deux zéros : ces deux zéros s'aperçoivent immédiatement; ce sont les points homologues de $u=0$, et $u=\alpha$. En effet, chacune des deux fonctions s'annule pour ces valeurs de u.

Les deux fonctions doublement périodiques (5) ayant mêmes zéros et mêmes infinis ne diffèrent que par un facteur constant; on a donc

$$\operatorname{cn} u \operatorname{cn}(u-\alpha) - \operatorname{cn}\alpha = A \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u-\alpha),$$

A désignant un facteur constant. Ce facteur se détermine en faisant $u = K$; il vient alors

$$-\operatorname{cn}\alpha = A\frac{\operatorname{cn}\alpha}{\operatorname{dn}\alpha}, \qquad A = -\operatorname{dn}\alpha.$$

En remplaçant A par cette valeur dans l'identité précédente, on obtient la formule suivante d'où nous déduirons toutes les autres formules d'addition

$$(6) \qquad \operatorname{cn}\alpha = \operatorname{cn} u \operatorname{cn}(u-\alpha) + \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u-\alpha)\operatorname{dn}\alpha.$$

88. **Relations entre les fonctions** $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$. — En faisant, dans la formule ci-dessus (6), $\alpha = 0$, on trouve

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1.$$

Dans cette formule remplaçons u par $u + iK'$. En tenant compte

des égalités

$$\operatorname{sn}(u+i\mathrm{K}') = \frac{1}{k \operatorname{sn} u}, \qquad \operatorname{cn}(u+i\mathrm{K}') = -\frac{\operatorname{dn} u}{ik \operatorname{sn} u},$$

il vient

$$\frac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2 u} - \frac{\operatorname{dn}^2 u}{k^2 \operatorname{sn}^2 u} = 1,$$

ou enfin

$$\operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u = 1.$$

Ainsi deux des trois fonctions $\operatorname{sn}^2 u$, $\operatorname{cn}^2 u$, $\operatorname{dn}^2 u$ peuvent s'exprimer linéairement en fonction de la troisième. On a, par exemple,

$$\operatorname{cn}^2 u = 1 - \operatorname{sn}^2 u,$$
$$\operatorname{dn}^2 u = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u.$$

89. **Module. Module complémentaire.** — Dans la relation

$$\operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u = 1,$$

faisons $u = \mathrm{K}$; on a d'abord $\operatorname{sn}\mathrm{K} = 1$, puis la relation

$$\operatorname{dn}(u+\mathrm{K}) = \frac{k'}{\operatorname{dn} u}$$

donne $\operatorname{dn}\mathrm{K} = k'$ et l'on est conduit à cette conséquence

$$k^2 + k'^2 = 1;$$

le nombre k s'appelle le *module,* le nombre k' *module complémentaire.*

90. **Formules d'addition pour** $\operatorname{sn} u$ **et** $\operatorname{cn} u$. — Dans la formule (6) posons $\alpha = -v$ puis, dans le résultat ainsi obtenu, échangeons v et u; nous trouvons

$$(7) \qquad \begin{cases} \operatorname{cn} u \operatorname{cn}(u+v) + \operatorname{sn} u \operatorname{dn} v \operatorname{sn}(u+v) = \operatorname{cn} v, \\ \operatorname{cn} v \operatorname{cn}(u+v) + \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{sn}(u+v) = \operatorname{cn} u. \end{cases}$$

Ces deux égalités vont nous donner $\operatorname{sn}(u+v)$ et $\operatorname{cn}(u+v)$ exprimés à l'aide de fonctions dont l'argument est u ou v.

En les résolvant par rapport à $\operatorname{sn}(u+v)$, il vient

$$(8) \qquad \operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{cn}^2 v}{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u - \operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}.$$

On a ainsi une formule d'addition algébrique pour la fonction $\operatorname{sn} u$. On l'écrit ordinairement sous une autre forme. Dans le second membre le numérateur s'obtient de suite en fonction de $\operatorname{sn} u$ et de $\operatorname{sn} v$ en remplaçant $\operatorname{cn}^2 u$ et $\operatorname{cn}^2 v$ par $1 - \operatorname{sn}^2 u$ et $1 - \operatorname{sn}^2 v$; le dénominateur est une fonction irrationnelle de ces mêmes quantités. Si nous multiplions les deux termes par la quantité conjuguée du dénominateur, nous trouvons

$$\operatorname{sn}(u+v) = \frac{(\operatorname{sn}^2 v - \operatorname{sn}^2 u)\{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u + \operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v\}}{\operatorname{sn}^2 v \operatorname{cn}^2 u \operatorname{dn}^2 u - \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 v \operatorname{dn}^2 v}.$$

Le dénominateur est une fonction entière de $\operatorname{sn}^2 u$ et $\operatorname{sn}^2 v$ qui s'annule pour $u = v$; il doit donc contenir en facteur $\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 v$. On a en effet

$$\operatorname{sn}^2 v \operatorname{cn}^2 u \operatorname{dn}^2 u - \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 v \operatorname{dn}^2 v = (\operatorname{sn}^2 v - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v);$$

alors le facteur $\operatorname{sn}^2 v - \operatorname{sn}^2 u$ disparaît et il reste

$$(9) \qquad \operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.$$

On obtient de même $\operatorname{cn}(u+v)$, en éliminant $\operatorname{sn}(u+v)$ entre les deux équations (7). Effectuons le calcul : nous trouvons successivement

$$\operatorname{cn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} u - \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} v}{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u - \operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v};$$

$$\operatorname{cn}(u+v) = \frac{\{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} u - \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} v\}\{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u + \operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v\}}{\operatorname{sn}^2 v \operatorname{cn}^2 u \operatorname{dn}^2 u - \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 v \operatorname{dn}^2 v}.$$

Dans le second membre le numérateur développé est

$$\{\operatorname{sn}^2 v \operatorname{dn}^2 u - \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 v\} \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v (\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{cn}^2 v),$$

ou

$$(\operatorname{sn}^2 v - \operatorname{sn}^2 u)\{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v\};$$

le dénominateur, on l'a vu, peut s'écrire

$$(\operatorname{sn}^2 v - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v).$$

On a donc enfin

$$(10) \qquad \operatorname{cn}(u+v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.$$

Formules d'addition pour $\operatorname{dn} u$. — La formule (6)

$$\operatorname{cn} \alpha = \operatorname{cn} u \operatorname{cn}(u - \alpha) + \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u - \alpha) \operatorname{dn} \alpha$$

devient, en posant $\alpha = u + v$,

$$\operatorname{cn}(u + v) = \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn}(u + v).$$

Cette relation donne $\operatorname{dn}(u + v)$ en fonction de $\operatorname{cn}(u + v)$: en y remplaçant $\operatorname{cn}(u + v)$ par l'expression (10) que nous venons de trouver, elle donne, après des réductions évidentes,

$$(11) \qquad \operatorname{dn}(u + v) = \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.$$

On a ainsi les formules d'addition pour les trois fonctions sn, cn, dn.

Autres formules. — Changeant dans ces formules v en $-v$, on en déduit les expressions de $\operatorname{sn}(u - v)$, $\operatorname{cn}(u - v)$, $\operatorname{dn}(u - v)$. On a, par exemple,

$$\operatorname{sn}(u - v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v - \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v};$$

d'où, en retranchant de $\operatorname{sn}(u + v)$,

$$(12) \qquad \operatorname{sn}(u + v) - \operatorname{sn}(u - v) = \frac{2 \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},$$

formule qui va nous servir à trouver la dérivée de $\operatorname{sn} u$.

91. Dérivées des fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$. Multiplicateur. — Pour avoir la dérivée de $\operatorname{sn} u$, il faut chercher la limite de $\frac{\operatorname{sn}(u + h) - \operatorname{sn} u}{h}$ pour $h = 0$. Pour cela transformons le numérateur comme on le fait dans la recherche de la dérivée du sinus, en nous servant de la formule (12). Dans cette formule remplaçons u par $u + \frac{h}{2}$ et v par $\frac{h}{2}$, cela donne

$$\frac{\operatorname{sn}(u + h) - \operatorname{sn} u}{h} = \frac{\operatorname{sn} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \frac{\operatorname{cn}\left(u + \frac{h}{2}\right) \operatorname{dn}\left(u + \frac{h}{2}\right)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{h}{2} \operatorname{sn}^2\left(u + \frac{h}{2}\right)}.$$

Appelons g la limite du rapport $\frac{\operatorname{sn} u}{u}$ quand u tend vers zéro : alors $\frac{\operatorname{sn}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ tend vers g, et on trouve, pour $h = 0$,

$$\frac{d \operatorname{sn} u}{du} = g \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u.$$

Le nombre g se nomme *multiplicateur*.

92. **Expression du multiplicateur en fonction des périodes. Choix de périodes $2K$ et $2iK'$ telles que le multiplicateur soit égal à l'unité.** — Nous avons à chercher la limite de $\frac{\operatorname{sn} u}{u}$ quand u tend vers zéro. D'après la définition de $\operatorname{sn} u$, on a

$$\frac{\operatorname{sn} u}{u} = \frac{\Theta_1(0)}{H_1(0)} \frac{\frac{H(u)}{u}}{\Theta(u)},$$

et nous sommes ramenés à chercher la limite de $\frac{H(u)}{u}$; cette limite peut se déterminer à l'aide du produit simplement infini qui représente $H(u)$; elle est égale à $H'(0)$ et nous avons démontré (n° 79) la relation

$$\frac{2K}{\pi} H'(0) = H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0).$$

L'expression de g, savoir

$$g = \frac{\Theta_1(0)}{H_1(0)} \frac{H'(0)}{\Theta(0)},$$

se simplifie, si l'on remplace $H'(0)$ par sa valeur tirée de la relation que nous venons de rappeler : g est alors donné par l'égalité

$$\frac{2Kg}{\pi} = \Theta_1^2(0).$$

Jusqu'ici les périodes $2K$ et $2iK'$ ont été prises arbitrairement et avec le même degré de généralité que 2ω et $2\omega'$. Dans ce qui suit, à moins de spécifier le contraire, nous supposerons K et K' choisis de façon que g soit égal à 1, c'est-à-dire nous sup-

poserons remplie la condition

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \theta_1(0) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots.$$

En tenant compte de cette condition, $g = 1$, l'équation qui donne la dérivée de $\operatorname{sn} u$ devient

$$\frac{d}{du} \operatorname{sn} u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u.$$

Ainsi, à l'avenir, K et K′ ne seront plus des quantités indépendantes : elles seront assujetties à vérifier la condition ci-dessus.

93. **Dérivées successives.** — En différentiant les expressions de $\operatorname{cn}^2 u$, $\operatorname{dn}^2 u$, savoir

$$\operatorname{cn}^2 u = 1 - \operatorname{sn}^2 u,$$
$$\operatorname{dn}^2 u = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u,$$

on trouvera les dérivées de $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$.

Les dérivées des trois fonctions sont données par les formules

$$\frac{d}{du}(\operatorname{sn} u) = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,$$
$$\frac{d}{du}(\operatorname{cn} u) = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u,$$
$$\frac{d}{du}(\operatorname{dn} u) = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u.$$

On peut aisément, en partant de ces formules, calculer les dérivées successives de l'une des trois fonctions. On trouvera par exemple, pour les dérivées de $\operatorname{sn} u$, des expressions de la forme

$$\frac{d^{2p+1}}{du^{2p+1}}(\operatorname{sn} u) = (a_0 + a_1 \operatorname{sn}^2 u + a_2 \operatorname{sn}^4 u + \ldots + a_p \operatorname{sn}^{2p} u) \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,$$
$$\frac{d^{2p}}{du^{2p}}(\operatorname{sn} u) = (A_0 + A_1 \operatorname{sn}^2 u + A_2 \operatorname{sn}^4 u + \ldots + A_p \operatorname{sn}^{2p} u) \operatorname{sn} u,$$

les coefficients étant des fonctions entières de k.

94. **Développements en séries entières.** — En appliquant la formule de Maclaurin aux trois fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ et en faisant

$\alpha = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right)$, on trouve

$$\operatorname{sn} u = u - 2k\alpha \frac{u^3}{1.2.3} + 4k^2(\alpha^2 + 3)\frac{u^5}{1.2.3.4.5} - 8k^3(\alpha^3 + 33\alpha)\frac{u^7}{1.2\ldots7} + \ldots,$$

$$\operatorname{cn} u = 1 - \frac{u^2}{1.2} + (1 + 4k^2)\frac{u^4}{1.2.3.4} - (1 + 44k^2 + 16k^4)\frac{u^6}{1.2\ldots6} + \ldots,$$

$$\operatorname{dn} u = 1 - \frac{k^2 u^2}{1.2} + k^2(4 + k^2)\frac{u^4}{1.2.3.4} - k^2(16 + 44k^2 + k^4)\frac{u^6}{1.2\ldots6} + \ldots,$$

et l'on démontre que ces développements sont valables quand le module de u est moindre que la distance de l'origine à celui des zéros de $\Theta(u)$ qui en est le plus rapproché. On voit qu'en négligeant u^4, $\operatorname{cn} u$ peut être remplacé par $\cos u$ et $\operatorname{dn} u$ par $\cos ku$; de plus, en négligeant u^5, on peut remplacer $\operatorname{sn} u$ par

$$\frac{\sin u\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{1+k^2}}.$$

95. **Dérivées des fonctions inverses. Première idée de l'inversion à l'aide des fonctions de Jacobi.** — De même qu'en Trigonométrie les dérivées de $\sin u$ et $\cos u$ conduisent à celles des fonctions inverses $\operatorname{arc}\sin x$ et $\operatorname{arc}\cos x$, les résultats précédents nous fournissent les dérivées des fonctions inverses de $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$.

Soit par exemple

$$x = \operatorname{sn} u; \tag{13}$$

cette équation résolue par rapport à u donne, pour u, deux valeurs dans un parallélogramme construit avec les périodes $4K$ et $2iK'$, car $\operatorname{sn} u$ est une fonction elliptique admettant ces deux périodes et admettant deux pôles simples dans ce parallélogramme.

L'une de ces valeurs étant appelée u, l'autre est $2K - u$; car

$$\operatorname{sn}(2K - u) = \operatorname{sn} u.$$

Les racines de l'équation (13) forment donc une double suite de valeurs

$$u + 4mK + 2niK', \qquad 2K - u + 4mK + 2niK',$$

m et n désignant des entiers.

Nous appellerons plus spécialement u celle de ces valeurs qui,

suivie par continuité, s'annule avec x et nous l'appellerons

$$u = \arg \operatorname{sn} x \tag{14}$$

(l'égalité précédente s'énonce : u égale argument $\operatorname{sn} x$).

Nous voulons calculer $\frac{du}{dx}$. Or (13) donne

$$\frac{dx}{du} = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}.$$

Donc

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}. \tag{15}$$

Telle est la dérivée de $\arg \operatorname{sn} x$; elle est algébrique comme celle de $\operatorname{arc} \sin x$. Comme u et x s'annulent en même temps, l'équation (15) donne par l'intégration

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}. \tag{16}$$

Inversement, si l'on est en présence d'une équation de cette forme, on en conclura

$$u = \arg \operatorname{sn} x, \qquad x = \operatorname{sn} u.$$

C'est ce qu'on appelle faire l'inversion de l'intégrale (16).

On trouve de même

$$\frac{d \arg \operatorname{cn} x}{dx} = \frac{1}{\pm\sqrt{(1-x^2)(k'^2+k^2x^2)}},$$

$$\frac{d \arg \operatorname{dn} x}{dx} = \frac{1}{\pm\sqrt{(1-x^2)(x^2-k'^2)}}.$$

L'intégrale (16) est appelée une *intégrale elliptique de première espèce, sous la forme normale de Legendre.*

96. **Dégénérescence.** — Les fonctions sn, cn, dn se réduisent à des fonctions circulaires ou exponentielles lorsque k^2 est égal à 0 ou à 1.

1° $k^2 = 0$. L'équation (16) devient alors

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

la fonction $x = \operatorname{sn} u$ devient donc $x = \sin u$. Les fonctions

$$\operatorname{cn} u = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 u}, \qquad \operatorname{dn} u = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u}$$

deviennent

$$\operatorname{cn} u = \cos u, \qquad \operatorname{dn} u = 1.$$

On peut vérifier qu'alors les formules d'addition (9) et (10) se réduisent aux formules donnant $\sin(u+v)$, $\cos(u+v)$.

2° $k^2 = 1$. Alors on a d'après (16)

$$u = \int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{1+x}{1-x},$$

d'où

$$x = \operatorname{sn} u = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}};$$

puis

$$\operatorname{cn} u = \operatorname{dn} u = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 u} = \frac{2}{e^u + e^{-u}}.$$

97. **Relation entre pu et $\operatorname{sn} u$.** — La fonction $\operatorname{sn} u$ que nous voulons comparer à pu est celle dont le *multiplicateur est égal à l'unité*, de sorte que, si l'on pose

$$z = \operatorname{sn} u,$$

z satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}.$$

Alors les périodes $2K$ et $2iK'$ de la fonction $\operatorname{sn}^2 u$ ne sont pas arbitraires. Elles doivent satisfaire à la condition

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots.$$

Au contraire les périodes 2ω et $2\omega'$ de pu sont prises arbitrairement. $\left(\text{On suppose seulement que dans le rapport } \frac{\omega'}{i\omega} \text{ la partie réelle est positive.}\right)$

Considérons la fonction $\operatorname{sn}^2 \frac{u}{\lambda}$ où λ est une constante; cette fonction admet comme périodes $2K\lambda$ et $2iK'\lambda$. On peut déter-

miner λ, K, K′ de façon que les périodes de $\operatorname{sn}^2 \frac{u}{\lambda}$ aient des valeurs données à l'avance 2ω et $2\omega'$. Si l'on prend

$$\frac{K'}{K} = \frac{\omega'}{i\omega},$$

la quantité q est connue et la relation entre K et K′ déterminera K. Au moyen de l'indéterminée λ on pourra satisfaire à la condition

$$2K\lambda = 2\omega$$

et, en se reportant à la valeur de $\frac{K'}{K}$, on trouvera

$$2iK'\lambda = 2\omega'.$$

Prenons alors la fonction pu construite avec les deux périodes 2ω et $2\omega'$, et comparons-la à $\frac{1}{\lambda^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u}{\lambda}}$, qui admet les mêmes périodes.

Dans un parallélogramme de périodes contenant le point o, ces deux fonctions ont un seul pôle, le point $u = 0$, qui est un pôle double. On a, de plus, quand u tend vers zéro,

$$\lim u^2 pu = 1, \qquad \lim \frac{u^2}{\lambda^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u}{\lambda}} = 1.$$

Les deux fonctions ont donc même partie principale dans le voisinage de $u = 0$ et la différence

$$pu - \frac{1}{\lambda^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u}{\lambda}}$$

est une fonction doublement périodique aux périodes 2ω, $2\omega'$ qui reste finie dans un parallélogramme des périodes. Elle se réduit donc à une constante C et l'on a

$$pu - \frac{1}{\lambda^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u}{\lambda}} = C.$$

Pour déterminer la constante C, développons en série le premier

membre dans le voisinage de $u = 0$. On a (n° 94)

$$\operatorname{sn} u = u - \frac{1+k^2}{6} u^3 + \ldots,$$

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 u} = \frac{1}{u^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{1+k^2}{6} u^2 + \ldots\right)^2} = \frac{1}{u^2} + \frac{1+k^2}{3} + a u^2 + \ldots$$

et, d'autre part,

$$pu = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{2^2 \cdot 5} u^2 + \ldots.$$

Donc

$$C = pu - \frac{1}{\lambda^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u}{\lambda}} = -\frac{1+k^2}{3\lambda^2} + \alpha u^2 + \ldots.$$

Faisant $u = 0$, on a $C = -\frac{1+k^2}{3\lambda^2}$, d'où la relation cherchée

$$pu = -\frac{1+k^2}{3\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{\operatorname{sn}^2 \frac{u}{\lambda}}.$$

On sait que $y = pu$ satisfait à l'équation différentielle

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = 4(y - e_1)(y - e_2)(y - e_3) = 4y^3 - g_2 y - g_3,$$

avec les conditions

$$e_1 = p\omega, \qquad e_2 = p(\omega + \omega'), \qquad e_3 = p\omega'.$$

Calculons e_1, e_2, e_3 en fonction de k^2 et de λ; pour $u = \omega$, $\frac{u}{\lambda} = K$, $\operatorname{sn} K = 1$,

$$e_1 = -\frac{1+k^2}{3\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2};$$

pour $u = \omega'$, $\frac{u}{\lambda} = iK'$, $\operatorname{sn}(iK') = \infty$

$$e_3 = -\frac{1+k^2}{3\lambda^2};$$

pour $u = \omega + \omega'$, $\frac{u}{\lambda} = K + iK'$, $\operatorname{sn}\left(\frac{u}{\lambda}\right) = \frac{1}{k}$

$$e_2 = p(\omega + \omega') = -\frac{1+k^2}{3\lambda^2} + \frac{k^2}{\lambda^2}.$$

Après des réductions évidentes, on trouve les égalités

$$\lambda^2 e_1 = \frac{2-k^2}{3}, \qquad \lambda^2 e_2 = \frac{2k^2-1}{3}, \qquad \lambda^2 e_3 = -\frac{1+k^2}{3},$$

et on en déduit

$$\lambda^2 = \frac{1}{e_1-e_3}, \qquad k^2 = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}, \qquad k'^2 = \frac{e_1-e_2}{e_1-e_3}.$$

Dans le cas particulier où l'on considère la fonction pu construite avec les périodes $2K$ et $2iK'$ elles-mêmes, on a $\lambda = 1$ et la relation entre p et sn devient

$$pu = \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u} - \frac{1}{3}(k^2+1).$$

98. **Théorème.** — *Toute fonction elliptique aux périodes* $2K$ *et* $2iK'$ *est une fonction rationnelle de* $\operatorname{sn}^2 u$ *et de sa dérivée* $2\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$.

En effet nous avons démontré (n° 49) que toute fonction elliptique est une fonction rationnelle de pu et $p'u$. Comme la relation ci-dessus donne

$$p'u = -\frac{2\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn}^3 u},$$

on voit que la fonction considérée, exprimée rationnellement en pu et $p'u$, se transforme immédiatement en une fonction rationnelle de $\operatorname{sn}^2 u$ et de sa dérivée.

Si l'on considère en général une fonction elliptique avec des périodes quelconques 2ω et $2\omega'$, elle est une fonction rationnelle de pu et $p'u$, c'est-à-dire de $\operatorname{sn}^2 \frac{u}{\lambda}$ et de sa dérivée.

99. **Développements de η et de η' en série.** — Pour avoir un développement de η en série, nous partirons de la relation entre ζu et Zu démontrée Chapitre II, n° 21 [équation (19)] et que nous récrivons ici

$$\frac{\eta}{\omega} u = \zeta u - Zu.$$

En prenant les dérivées des deux membres et en faisant ensuite

$u = \omega'$, nous trouvons

$$\frac{\eta}{\omega} = -\,\mathrm{p}u - \mathrm{Z}'u,$$

puis

$$\frac{\eta}{\omega} = -\,e_3 - \mathrm{Z}'\omega'.$$

$\mathrm{Z}'\omega'$ peut s'obtenir en faisant $u = 0$ dans

$$\mathrm{Z}'(u+\omega') = \frac{d}{du}\left[\frac{\mathrm{H}'(u+\omega')}{\mathrm{H}(u+\omega')}\right] = \frac{d}{du}\left[\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}\right].$$

Or, du développement en produit infini de $\Theta(u)$ obtenu au n° 78, savoir

$$\Theta(u) = \mathrm{A}\left(1 - 2q\cos\frac{\pi u}{\omega} + q^2\right)\left(1 - 2q^3\cos\frac{\pi u}{\omega} + q^6\right)\ldots,$$

on déduit successivement

$$\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} = \frac{2\pi}{\omega}\sin\frac{\pi u}{\omega}\left(\frac{q}{1 - 2q\cos\frac{\pi u}{\omega} + q^2} + \frac{q^3}{1 - 2q^3\cos\frac{\pi u}{\omega} + q^6} + \ldots\right),$$

$$\frac{d}{du}\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} = \mathrm{P}\sin\frac{\pi u}{\omega}$$
$$+\left(\frac{q}{1 - 2q\cos\frac{\pi u}{\omega} + q^2} + \frac{q^3}{1 - 2q^3\cos\frac{\pi u}{\omega} + q^6} + \ldots\right)\frac{2\pi^2}{\omega^2}\cos\frac{\pi u}{\omega},$$

P désignant une fonction de u qui reste finie pour $u = 0$. Donc

$$\mathrm{Z}'(\omega') = \frac{2\pi^2}{\omega^2}\sum\frac{q^n}{(1-q^n)^2},$$

et, par suite,

$$\frac{\eta}{\omega} + e_3 = -\frac{2\pi^2}{\omega^2}\sum\frac{q^n}{(1-q^n)^2}, \qquad q = e^{i\pi\frac{\omega'}{\omega}},$$
$$n = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots.$$

Pour avoir le développement de η', dans l'égalité précédente, remplaçons ω et ω' par ω' et $-\omega$; $q = e^{i\pi\frac{\omega'}{\omega}}$ devient $q_0 = e^{-i\pi\frac{\omega}{\omega'}}$; de plus $e_3 = \mathrm{p}(\omega')$ devient $e_1 = \mathrm{p}(\omega)$, et nous obtenons

$$\frac{\eta'}{\omega'} + e_1 = -\frac{2\pi^2}{\omega'^2}\sum\frac{q_0^n}{(1-q_0^n)^2}, \qquad q_0 = e^{-i\pi\frac{\omega}{\omega'}},$$
$$n = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots.$$

100. Exemples de décomposition en éléments simples et d'intégration. — 1° Prenons d'abord la fonction

$$f(u) = \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 a},$$

où a est une constante qui n'est pas de la forme $2mK + 2niK'$. Cette fonction est du second ordre; elle admet, dans un parallélogramme des périodes $2K$ et $2iK'$, deux pôles simples homologues respectivement des points $+a$ et $-a$. Le résidu A relatif au pôle $u = a$ est

$$A = \lim \frac{u - a}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 a},$$

pour $u = a$. La limite de ce rapport s'obtient immédiatement en prenant la limite du rapport des dérivées

$$A = \frac{1}{2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}.$$

Le résidu relatif à l'autre pôle $u = -a$ est $-A$. On a donc, en appelant B une constante,

$$f(u) = A\,Z(u - a) - A\,Z(u + a) + B,$$

ou, en remplaçant A par sa valeur,

$$\frac{2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 a} = Z(u - a) - Z(u + a) + C,$$

C désignant une autre constante. Nous déterminons C en faisant $u = 0$, ce qui donne

$$C = -\frac{2 \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a} + 2Z(a).$$

Cette valeur de C se simplifie si l'on se reporte à la définition de $\operatorname{sn} u$,

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(u)}{\Theta(u)},$$

qui donne, en prenant les dérivées logarithmiques des deux membres,

$$\frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} = Z(u) - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)};$$

on a donc en changeant u en a

$$C = 2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)},$$

d'où la formule définitive

$$(18)\qquad \frac{2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 a} = Z(u-a) - Z(u+a) + 2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}.$$

Cette même formule s'obtiendrait en regardant le premier membre comme une fonction de a et le décomposant en éléments simples.

En intégrant les deux membres par rapport à u, on a

$$\int \frac{2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 a}\,du = \mathrm{Log}\frac{\mathrm{H}(u-a)}{\mathrm{H}(u+a)} + 2u\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \text{const.}$$

De même en intégrant les deux membres de la formule (18) par rapport à a et remarquant que $2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a$ est la dérivée de $\mathrm{sn}^2 a$, on a

$$\mathrm{Log}(\mathrm{sn}^2 a - \mathrm{sn}^2 u) = \mathrm{Log}\,\mathrm{H}(a-u) + \mathrm{Log}\,\mathrm{H}(a+u) - 2\,\mathrm{Log}\,\Theta(a) + \mathrm{Log}\,C,$$

C désignant une constante relativement à a.

On en conclut

$$\mathrm{sn}^2 a - \mathrm{sn}^2 u = C\frac{\mathrm{H}(a-u)\,\mathrm{H}(a+u)}{\Theta^2(a)}$$

et, en faisant $a = 0$,

$$C = \Theta^2(0)\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{H}^2(u)} = \frac{1}{k}\frac{\Theta^2(0)}{\Theta^2(u)}.$$

D'où la formule définitive

$$\mathrm{sn}^2 a - \mathrm{sn}^2 u = \frac{\Theta^2(0)}{k}\frac{\mathrm{H}(a-u)\,\mathrm{H}(a+u)}{\Theta^2(a)\,\Theta^2(u)},$$

mettant en évidence les zéros et les pôles du premier membre.

2° Proposons-nous maintenant de décomposer en éléments simples la fonction

$$\frac{1}{\mathrm{sn}^2 u},$$

qui admet, dans un parallélogramme des périodes, un pôle double homologue du point $u = 0$. Comme, dans le domaine du point

$u = 0$, on a

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 u} = \frac{1}{u^2} + \text{fonction régulière},$$

on aura

$$(19) \qquad \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u} = -Z'(u) + D,$$

D désignant une constante que nous allons déterminer. Auparavant, nous changerons dans la formule (19) u en $u + i\mathrm{K}'$, en nous rappelant les relations suivantes

$$\operatorname{sn}(u + i\mathrm{K}') = \frac{1}{k \operatorname{sn} u},$$

$$\mathrm{H}(u + i\mathrm{K}') = i e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2u + i\mathrm{K}')}\Theta(u),$$

dont la seconde donne, en prenant les dérivées logarithmiques,

$$Z(u + i\mathrm{K}') = -\frac{i\pi}{2\mathrm{K}} + \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)},$$

$$Z'(u + i\mathrm{K}') = \frac{d}{du}\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}.$$

D'après cela, la relation (19) devient, par changement de u en $u + i\mathrm{K}'$,

$$k^2 \operatorname{sn}^2 u = -\frac{d}{du}\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} + D.$$

Faisant, dans cette dernière formule, $u = 0$ et remarquant que $\Theta'(0) = 0$, car $\Theta(u)$ est paire, on a

$$D = \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}.$$

D'où les deux formules

$$(20) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{sn}^2 u} = -Z'(u) + \dfrac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}, \\[2ex] k^2 \operatorname{sn}^2 u = -\dfrac{d}{du}\dfrac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} + \dfrac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}. \end{cases}$$

On en déduit par l'intégration

$$\int \frac{du}{\operatorname{sn}^2 u} = -Z(u) + u\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} + \text{const.},$$

$$k^2 \int \operatorname{sn}^2 u \, du = -\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} + u\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} + \text{const.}$$

Remarque. — La première des formules (20) peut se déduire aussi comme cas limite de la formule (18). Il suffit pour cela de diviser les deux membres de cette formule par $2a$ et de faire tendre a vers zéro.

101. Notations d'Abel. — Dans son premier Mémoire, Abel a désigné par φ, f, F les fonctions sn, cn, dn. Plus tard, il a employé la lettre λ pour la fonction sn. Cette notation a été adoptée par Briot et Bouquet, qui désignent les trois fonctions sn, cn, dn par λ, μ, ν.

$$\operatorname{sn} u = \lambda(u), \qquad \operatorname{cn} u = \mu(u), \qquad \operatorname{dn} u = \nu(u).$$

EXERCICES SUR LE CHAPITRE IV.

1. Démontrer les formules suivantes, qui sont des conséquences des formules d'additions :

$$(1)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(a+b)+\operatorname{sn}(a-b) = \dfrac{2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}b\operatorname{dn}b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}, \\[2ex] \operatorname{cn}(a+b)+\operatorname{cn}(a-b) = \dfrac{2\operatorname{cn}a\operatorname{cn}b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}, \\[2ex] \operatorname{dn}(a+b)+\operatorname{dn}(a-b) = \dfrac{2\operatorname{dn}a\operatorname{dn}b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(a+b)\operatorname{sn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{sn}^2a-\operatorname{sn}^2b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}, \\[2ex] \operatorname{cn}(a+b)\operatorname{cn}(a-b) = \dfrac{1}{k^2}\,\dfrac{\operatorname{dn}^2a\operatorname{dn}^2b-k'^2}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}, \\[2ex] \operatorname{dn}(a+b)\operatorname{dn}(a-b) = \dfrac{k^2\operatorname{cn}^2a\operatorname{cn}^2b+k'^2}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}. \end{cases}$$

$$(3)\quad \operatorname{sn}(a+b)\operatorname{cn}(a-b)+\operatorname{sn}(a-b)\operatorname{cn}(a+b) = \frac{2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}.$$

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\operatorname{dn}(a-b)-\operatorname{cn}(a-b)}{\operatorname{sn}(a-b)} = \dfrac{\operatorname{dn}a\operatorname{cn}b-\operatorname{cn}a\operatorname{dn}b}{\operatorname{sn}a+\operatorname{sn}b}, \\[2ex] \dfrac{1+\operatorname{dn}(a-b)}{k\operatorname{sn}(a-b)} = k\,\dfrac{\operatorname{sn}a\operatorname{cn}b+\operatorname{sn}b\operatorname{cn}a}{\operatorname{dn}b-\operatorname{dn}a}. \end{cases}$$

2. **Duplication de l'argument.** — Faisant $v = u$ dans les formules d'addition et écrivant s, c, d à la place de $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, il vient

$$\operatorname{sn} 2u = \frac{2scd}{1 - k^2 s^4},$$

$$\operatorname{cn} 2u = \frac{1 - 2s^2 + k^2 s^4}{1 - k^2 s^4} = \frac{-k'^2 + 2k'^2 c^2 + k^2 c^4}{k'^2 + 2k^2 c^2 - k^2 c^4},$$

$$\operatorname{dn} 2u = \frac{1 - 2k^2 s^2 + k^2 s^4}{1 - k^2 s^4} = \frac{k'^2 - 2k'^2 d^2 + d^4}{-k'^2 + 2d^2 - d^4}.$$

En posant $S = \operatorname{sn} 2u$, $C = \operatorname{cn} 2u$, $D = \operatorname{dn} 2u$, ces formules s'écrivent

$$\frac{1 - C}{1 + C} = \frac{s^2 d^2}{c^2}, \qquad \frac{1 - D}{1 + D} = \frac{k^2 s^2 c^2}{d^2}, \qquad \frac{D - C}{D + C} = \frac{k'^2 s^2}{c^2 d^2};$$

$$s^2 = \frac{1 - C}{1 + D} = \frac{1}{k^2} \frac{1 - D}{1 + C} = \ldots,$$

$$c^2 = \frac{D + C}{1 + D} = \frac{k'^2}{k^2} \frac{1 - D}{D - C} = \ldots,$$

$$d^2 = \frac{D + C}{1 + C} = k'^2 \frac{1 - C}{D - C} = \ldots.$$

Faisons $u = \frac{1}{2} K$, alors $S = 1$, $C = 0$, $D = k'$; donc

$$\operatorname{sn} \frac{K}{2} = \sqrt{\frac{1}{1 + k'}}, \qquad \operatorname{cn} \frac{K}{2} = \sqrt{\frac{k'}{1 + k'}}, \qquad \operatorname{dn} \frac{K}{2} = \sqrt{k'}.$$

3. Démontrer la formule de décomposition en éléments simples

$$\frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} = \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2} \left[\frac{\Theta'(u - a)}{\Theta(u - a)} - \frac{\Theta'(u + a)}{\Theta(u + a)} \right].$$

Cette formule peut se déduire de celle du n° 100 en y remplaçant u par $u + iK'$.

4. Vérifier que l'on a

$$-k \int \operatorname{sn} u \, du = \operatorname{Log}(\operatorname{dn} u + k \operatorname{cn} u).$$

Montrer qu'on peut de même déterminer les constantes a, b, a', b' de façon que

$$a \int \operatorname{cn} u \, du = \operatorname{Log}(\operatorname{sn} u + a' \operatorname{dn} u),$$

$$b \int \operatorname{dn} u \, du = \operatorname{Log}(\operatorname{cn} u + b' \operatorname{sn} u).$$

Il suffit de différentier et d'identifier.

5. **Un cas particulier des surfaces minima.** — Un exercice intéressant pour appliquer la différentiation des fonctions elliptiques consiste à vérifier que la surface découverte par Schwarz (*Gesammelte mathematische Abhandlungen*, vol. I, p. 77)

$$\operatorname{cn} x + \operatorname{cn} y + \operatorname{cn} z + \operatorname{cn} x \operatorname{cn} y \operatorname{cn} z = 0,$$

avec le module $k = \frac{1}{2}$, est une surface minimum dont la courbure totale en chaque point est nulle, satisfaisant, par conséquent, à la condition

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0,$$

p, q, r, s, t ayant leurs significations ordinaires de dérivées partielles de z par rapport à x, y. Schwarz montre que cette condition équivaut à la suivante

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{1+p^2+q^2} = \sqrt{1+p^2+q^2}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) = 0;$$

ρ_1 et ρ_2 sont les rayons de courbure principaux de la surface, et l'on pose

$$X = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad Y = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Le lecteur trouvera le détail du calcul de vérification dans l'Ouvrage de Greenhill sur les *Fonctions elliptiques*, p. 35; Carré, 1895.

6. Démontrer les relations

$$\Theta^2(0)\, H(u+a)\, H(u-a) = \Theta^2(a) H^2(u) - H^2(a)\, \Theta^2(u),$$

$$\Theta^2(0)\, \Theta(u+a)\, \Theta(u-a) = \Theta^2(a)\, \Theta^2(u) - H^2(a)\, H^2(u),$$

$$= \Theta_1^2(a)\, \Theta_1^2(u) - H_1^2(a) H_1^2(u),$$

$$\Theta_1^2(0)\, \Theta(u+a)\, \Theta(u-a) = \Theta^2(a)\, \Theta_1^2(u) + H^2(a) H_1^2(u),$$

$$H_1^2(0) H_1(u+a) H_1(u-a) = \Theta_1^2(a) \Theta_1^2(u) - \Theta^2(a)\, \Theta^2(u),$$

$$H_1(0)\Theta_1(a)\Theta_1(u)H_1(u-a) - \Theta_1(0)H_1(a)H_1(u)\Theta_1(u-a)$$
$$= \Theta(0)H(a)H(u)\Theta(u-a),$$

$$H_1(a)\Theta(a)H_1(u)\Theta(u) + H(a)\Theta_1(a)H(u)\Theta_1(u)$$
$$= \Theta(0)H_1(0)H_1(u-a)\Theta(u+a),$$

Il suffit de vérifier que, dans chacune de ces formules, le quotient d'un des membres par l'autre est une fonction de u admettant les périodes $2K$ et $2iK'$ et *restant finie* quel que soit u. Ce quotient est alors une *constante* que l'on détermine en donnant à u une valeur particulière.

CHAPITRE V.

ÉTUDE DES VALEURS RÉELLES DE $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, QUAND K ET K′ SONT RÉELS. APPLICATIONS.

Nous nous proposons, en vue des applications, de faire, pour les fonctions de Jacobi, une étude analogue à celle que nous avons faite pour pu dans le Chapitre III. Nous supposerons, comme dans ce Chapitre, que ω et $\frac{\omega'}{i}$ sont réels, ce qui revient à supposer K et K′ réels.

I. — K ET K′ RÉELS.

102. **Le module est réel et moindre que 1.** — La série qui définit k et k' montre que, K et K′ étant réels, k et k' le sont aussi. Comme on a

$$k^2 + k'^2 = 1,$$

le module k et le module complémentaire k' sont réels et plus petits que 1.

103. **Argument réel.** — Considérons d'abord la fonction

$$z = \operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(u)}{\Theta(u)}.$$

Quand u varie en restant réel de 0 à K, z est réel puisque, dans les développements en série trigonométrique de $H(u)$ et $\Theta(u)$, tout est réel; dans cet intervalle z varie d'une manière continue, puisque $\Theta(u)$ a pour racines $2mK + (2n+1)iK'$. De plus, la dérivée

$$\frac{dz}{du} = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$$

garde un signe constant, puisque les fonctions $H_1(u)$, $\Theta_1(u)$,

$\Theta(u)$ ne s'annulent pour aucune valeur comprise entre o et K; cette dérivée est égale à 1 pour $u = 0$; donc elle est constamment positive entre o et K. La fonction $\operatorname{sn} u$ est croissante : elle est nulle pour $u = 0$ et égale à 1 pour $u = K$.

De la variation de $\operatorname{sn} u$, on déduit celle de $\operatorname{cn} u$ et $\operatorname{dn} u$, quand u varie de o à K. En effet

$$\operatorname{cn} u = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 u}$$

varie de 1 à o, et

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u}$$

varie de 1 à k'.

On conclut de là les variations des trois fonctions dans tout intervalle réel en se rappelant que $\operatorname{sn} u$ est impaire, que $\operatorname{cn} u$ et $\operatorname{dn} u$ sont paires, et que l'on a

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(u + 2K) &= -\operatorname{sn} u, \\ \operatorname{cn}(u + 2K) &= -\operatorname{cn} u, \\ \operatorname{dn}(u + 2K) &= \operatorname{dn} u. \end{aligned}$$

104. **Argument de la forme $v + iK'$, v réel.** — L'égalité

$$\operatorname{sn}(v + iK') = \frac{1}{k \operatorname{sn} v}$$

donne immédiatement la variation de $\operatorname{sn} u$ quand

$$u = v + iK'$$

et que v varie de o à K. Comme $\operatorname{sn} v$ croît de o à 1, $\operatorname{sn}(v + iK')$ décroît de $+\infty$ à $\frac{1}{k}$.

Les fonctions

$$\operatorname{cn} u = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 u}, \qquad \operatorname{dn} u = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u}$$

sont purement imaginaires pour ces valeurs de u.

105. **Argument purement imaginaire.** — Les séries trigonométriques définissant H, Θ, H_1, Θ_1 montrent immédiatement que, u étant réel, $H(iu)$ est purement imaginaire; $\Theta(iu)$, $H_1(iu)$ et $\Theta_1(iu)$ sont réels. Donc, $\operatorname{sn} iu$ est purement imaginaire; $\operatorname{cn} iu$ et $\operatorname{dn} iu$ sont réels.

Pour étudier les variations de ces fonctions et mettre ces propriétés en évidence, nous nous servirons des formules du n° 80, relatives à l'échange de K et K'.

Ces formules permettent de ramener les fonctions sn iu, cn iu, dn iu, construites avec les périodes $2K$ et $2iK'$, à d'autres fonctions sn u, cn u, dn u, construites avec les périodes $2K'$ et $2iK$.

On a par définition

$$\operatorname{sn} u = \frac{\Theta_1(0)}{H_1(0)} \times \frac{H(u)}{\Theta(u)}, \qquad \operatorname{cn} u = \frac{\Theta(0)}{H_1(0)} \times \frac{H_1(u)}{\Theta(u)}.$$

Transformons sn iu en nous servant des formules suivantes démontrées n° 80

$$e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}} H(iu \mid K, iK') = A i H(u \mid K', iK),$$

$$e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}} \Theta(iu \mid K, iK') = A\, H_1(u \mid K', iK);$$

nous avons d'abord

$$\frac{H(iu \mid K, iK')}{\Theta(iu \mid K, iK')} = i \frac{H(u \mid K', iK)}{H_1(u \mid K', iK)},$$

puis, d'une manière analogue,

$$\frac{\Theta_1(0 \mid K, iK')}{H_1(0 \mid K, iK')} = \frac{\Theta_1(0 \mid K', iK)}{\Theta(0 \mid K', iK)},$$

et nous déduisons de là

$$\operatorname{sn}(iu \mid K, iK') = i \frac{\operatorname{sn}(u \mid K', iK)}{\operatorname{cn}(u \mid K', iK)},$$

en désignant par $\operatorname{sn}(u \mid K, iK')$ la fonction sn u construite avec les périodes $2K$ et $2iK'$ et par $\operatorname{sn}(u \mid K', iK)$ celle qui s'en déduit en échangeant K et K'.

En raisonnant de même et en employant des notations analogues on démontrerait les deux autres formules

$$\operatorname{cn}(iu \mid K, iK') = \frac{1}{\operatorname{cn}(u \mid K', iK)},$$

$$\operatorname{dn}(iu \mid K, iK') = \frac{\operatorname{dn}(u \mid K', iK)}{\operatorname{cn}(u \mid K', iK)}.$$

Ainsi, quand u est réel, la fonction sn iu prend des valeurs

purement imaginaires, tandis que cn iu et dn iu sont réels. Il serait facile de suivre les variations de ces dernières fonctions : il suffirait pour cela d'étudier leurs variations quand u varie de o à K'. Ainsi la fonction $\text{cn}(u|K', iK)$ varie de 1 à 0, d'après ce qu'on a vu pour les arguments réels; donc $\text{cn}(iu|K, iK')$ croît de 1 à $+\infty$.

106. Argument de la forme $K + iu$, u **réel.** — Prenons maintenant un argument de la forme $K + iu$ en supposant que u est réel et croît de o à K. On a d'abord

$$\text{sn}(K + iu) = \frac{\text{cn}(iu)}{\text{dn}(iu)};$$

puis, en se servant des formules précédentes et mettant les périodes en évidence, on trouve

$$\text{sn}(K + iu|K, iK') = \frac{1}{\text{dn}(u|K', iK)}.$$

La fonction est donc réelle et varie d'une manière continue quand u varie de o à K', c'est-à-dire de o à la demi-période réelle de la fonction *dn* qui figure au dénominateur. Appelons pour un instant k_1 le module des fonctions elliptiques $\text{sn}(u|K', iK)$, $\text{cn}(u|K', iK)$, $\text{dn}(u|K', iK)$: nous avons vu que, quand u varie de o à la demi-période réelle K', $\text{sn}(u|K', iK)$ croît de 0 à 1, $\text{dn}(u|K', iK)$ décroît constamment de 1 à $\sqrt{1 - k_1^2}$. Donc, quand u croît de o à K', la fonction

$$\text{sn}(K + iu|K, iK')$$

croît constamment de 1 à $\dfrac{1}{\sqrt{1 - k_1^2}}$.

On peut trouver directement les valeurs extrêmes de la fonction : pour $u = 0$, elle est égale à 1 puisque $\text{sn}\,K = 1$; quand $u = K'$, elle devient égale à $\frac{1}{k}$, comme le montre la formule

$$\text{sn}(v + iK') = \frac{1}{k\,\text{sn}\,v},$$

dans laquelle on fait $v = K$. On doit donc avoir

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k_1^2}} = \frac{1}{k}, \qquad k_1 = \sqrt{1 - k^2} = k'.$$

Le module des fonctions nouvelles $\operatorname{sn}(u|K', iK)$, ... est donc k'.

107. Résumé. — Les résultats précédents peuvent se résumer ainsi. Soient Ox, Oy deux axes rectangulaires : prenons sur Ox $OA = K$, sur Oy, $OB = K'$ et soit C le quatrième sommet du rectangle construit sur OA et sur OB.

Lorsque le point dont l'affixe est u décrit successivement les côtés OA, AC, CB, la valeur de $\operatorname{sn} u$ varie de 0 à 1, de 1 à $\frac{1}{k}$, puis de $\frac{1}{k}$ à $+\infty$

u.........	O	A	C	B
$\operatorname{sn} u$.......	0	1	$\frac{1}{k}$	$+\infty$

On formerait de même pour $\operatorname{cn} u$ et $\operatorname{dn} u$ les Tableaux suivants, en supposant toujours que le point mobile parcourt les côtés du rectangle OACB :

u........	A	O	B
$\operatorname{cn} u$......	0	1	∞

u........	C	A	O	B
$\operatorname{dn} u$......	0	k'	1	∞

Fig. 7.

108. Expression des périodes par des intégrales définies. — La fonction

$$z = \operatorname{sn} u$$

satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dz}{du} = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,$$

qui peut s'écrire

$$du = \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}.$$

Quand u varie de o à K, z est réel et croît constamment de o à 1 (n° 103); on a donc

$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

D'autre part, si l'on pose

$$u = K + it$$

et si l'on fait varier t de o à K′, $\operatorname{sn} u$ croît constamment de o à $\frac{1}{k}$; on en déduit

$$iK' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Or, en faisant le changement de variable

$$z = \frac{1}{\sqrt{1-k'^2z_1^2}},$$

l'intégrale devient

$$i\int_0^1 \frac{dz_1}{\sqrt{(1-z_1^2)(1-k'^2z_1^2)}};$$

K′ est donc déterminé par l'égalité

$$K' = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}}.$$

On voit que K′ est défini à l'aide du module complémentaire k' comme K est défini à l'aide du module k; par suite, quand on remplace k par k', on échange par là même K et K′. C'est, sous une autre forme, le résultat que nous avons déjà trouvé, quand nous avons vu que le module des fonctions $\operatorname{sn}(u \mid K', iK)$, ... est égal à k'.

109. Relations entre K, K′ et k. — Les deux quantités K et K′, exprimées sous forme d'intégrales définies

$$(1) \quad K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \qquad K' = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}},$$

où

$$k'^2 = 1 - k^2$$

apparaissent comme des fonctions de la seule quantité k. *Elles sont donc liées par une relation et ne sont pas indépendantes.* Cette relation est celle que l'on a établie, entre K et K′, pour rendre le multiplicateur

$$g = \lim \frac{\operatorname{sn} u}{u}, \qquad \text{pour} \qquad u = 0,$$

égal à 1. Cette relation peut s'écrire (n° 92)

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \Theta_1(0). \tag{2}$$

Ainsi les fonctions K et K′ de k, définies par les relations (1), vérifient cette relation.

Les fonctions sn, cn, dn, construites avec K et iK′, sont donc déterminées dès qu'on connaît k. Aussi, au lieu de les écrire $\operatorname{sn}(u|K, iK')$, les écrit-on plus simplement $\operatorname{sn}(u, k)$, $\operatorname{cn}(u, k)$, $\operatorname{dn}(u, k)$. Par le changement de k en k', K et K′ s'échangent.

Les fonctions $\operatorname{sn}(u|K', iK)$, ... s'écriront donc $\operatorname{sn}(u, k')$, $\operatorname{cn}(u, k')$, $\operatorname{dn}(u, k')$. Avec ces notations, les formules établies plus haut pour l'argument purement imaginaire s'écrivent

$$\operatorname{sn}(iu, k) = i\frac{\operatorname{sn}(u, k')}{\operatorname{cn}(u, k')},$$

$$\operatorname{cn}(iu, k) = \frac{1}{\operatorname{cn}(u, k')},$$

$$\operatorname{dn}(iu, k) = \frac{\operatorname{dn}(u, k')}{\operatorname{cn}(u, k')}.$$

Par exemple, si l'on se place dans un cas de dégénérescence (n° 96), $k = 0$, on a $k' = 1$, et la deuxième formule donne

$$\cos iu = \frac{e^u + e^{-u}}{2}.$$

Le module k peut prendre une valeur réelle quelconque comprise entre 0 et 1. En effet, dans la théorie que nous venons de développer, nous avons vu que, les deux quantités réelles et positives K et K′ étant choisies de façon à vérifier l'équation (2), le multiplicateur est égal à 1, et le module k donné par

$$\sqrt{k} = \frac{H_1(0)}{\Theta_1(0)} = \frac{2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + \ldots}{1 + 2q^4 + 2q^9 + \ldots}, \qquad q = e^{-\pi\frac{K'}{K}};$$

nous avons démontré ensuite que le module complémentaire k' s'obtient en permutant K et K', ce qui donne

$$\sqrt{k'} = \frac{2\sqrt[4]{q_0} + 2\sqrt[4]{q_0^9} + \ldots}{1 + 2q_0 + 2q_0^4 + \ldots}, \qquad q_0 = e^{-\pi\frac{K}{K'}}.$$

Quand le rapport $\frac{K}{K'}$ est nul, $q = 0$, $k = 0$; quand ce rapport est infini, $q_0 = 0$, $k' = 0$, $k = 1$. Donc, le rapport $\frac{K}{K'}$ variant de 0 à ∞, k varie de 0 à 1; il passe par toutes les valeurs inférieures à 1. D'après la théorie que nous avons développée, les déterminations de K et K' qui font acquérir à k une de ces valeurs sont données par les intégrales définies (1).

110. Inversion. — Supposons que, k étant un nombre moindre que 1, on ait trouvé entre u et z une relation de la forme

(3) $$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}.$$

On calculera les demi-périodes K et iK' par les intégrales définies (1). On construira ensuite les fonctions H, Θ, H_1, Θ_1, $\operatorname{sn}(u, k)$, $\operatorname{cn}(u, k)$, $\operatorname{dn}(u, k)$ correspondantes, et l'on aura

$$u = \arg \operatorname{sn} z, \qquad z = \operatorname{sn} u,$$

$$\sqrt{1 - z^2} = \operatorname{cn} u, \qquad \sqrt{1 - k^2 z^2} = \operatorname{dn} u.$$

On aura ainsi réalisé ce qu'on appelle l'*inversion* de l'intégrale (3).

111. Expression de K par une série hypergéométrique. — Dans la formule qui définit K par une intégrale définie, faisons $z = \sin\varphi$: on aura

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi.$$

Développons, par la formule du binome, la quantité sous le

signe d'intégration

$$(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}k^{2n}\sin^{2n}\varphi.$$

D'après une formule due à Wallis et facile à vérifier, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{2}\,\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}.$$

Donc enfin

$$K = \frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4+\ldots+\left(\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2 k^{2n}+\ldots\right].$$

La série ainsi obtenue est un cas particulier de la série hypergéométrique de Gauss

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}\,\frac{x}{1}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\,\frac{x^2}{1.2}+\ldots.$$

On a, en effet,

$$K = \frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,k^2\right).$$

112. **Valeurs réelles de pu, dans le cas où ω et $\frac{\omega'}{i}$ sont réels, rattachées à celles de $\mathrm{sn}^2 u$.** — Supposons que la fonction pu soit construite avec deux périodes 2ω et $2\omega'$ telles que ω et $\frac{\omega'}{i}$ soient réels. Nous avons étudié ce cas en détail. Nous pouvons, à titre d'exercice, rattacher les résultats que nous avons obtenus à ceux du présent paragraphe, en nous servant de la relation entre les fonctions p et sn. Nous avons trouvé en général

$$pu = -\frac{1+k^2}{3\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2\,\mathrm{sn}^2\frac{u}{\lambda}}$$

avec

$$2K\lambda = 2\omega,\qquad 2iK'\lambda = 2\omega',$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{e_1-e_3},\qquad k^2 = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3},\qquad k'^2 = \frac{e_1-e_2}{e_1-e_3}.$$

Dans le cas actuel, le polynome

$$4z^3-g_2z-g_3$$

a ses racines réelles; le discriminant

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2$$

est positif. De plus, $e_1 > e_2 > e_3$. Alors $\lambda^2 > 0$; la valeur de k^2 est réelle et comprise entre 0 et 1; les périodes $2K$ et $2iK'$ de la fonction $\operatorname{sn}^2 u$ sont, la première réelle, la seconde purement imaginaire. D'après cela quand u est réel, pu est évidemment réel. Nous avons vu (n° 54) que, l'argument u étant purement imaginaire, pu est encore réel; cela résulte de la formule

$$p(iu; g_2, g_3) = -p(u; g_2, -g_3).$$

Nous allons vérifier cette formule en nous servant de l'égalité qui ramène pu à la fonction $\operatorname{sn}^2 u$. Cherchons l'expression de

$$p(u; g_2, -g_3).$$

Quand on change g_3 en $-g_3$, dans l'équation

$$4y^3 - g_2 y - g_3 = 0,$$

on change les signes des trois racines e_1, e_2, e_3 ou, en précisant, si e_1, e_2, e_3 sont les racines de l'équation précédente rangées par ordre de grandeur décroissante, les racines de l'équation

$$4y^3 - g_2 y + g_3 = 0,$$

rangées aussi par ordre de grandeur décroissante, seront

$$e'_1 = -e_3, \qquad e'_2 = -e_2, \qquad e'_3 = -e_1;$$

le carré du module de $p(u, g_2 - g_3)$ est égal à

$$\frac{e'_2 - e'_3}{e'_1 - e'_3} = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}.$$

On voit que c'est le carré du complément du module de la fonction $p(u; g_2, g_3)$; le multiplicateur de $p(u; g_2, -g_3)$ est

$$\lambda'^2 = \frac{1}{e'_1 - e'_3} = \frac{1}{e_1 - e_3} = \lambda^2;$$

il est le même que pour la fonction $p(u; g_2, g_3)$.

En résumé, changer g_3 en $-g_3$ revient à changer k en k', et

l'on a

$$p(u; g_2, -g_3) = -\frac{1+k'^2}{3\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}\frac{1}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{\lambda}, k'\right)},$$

et la formule à vérifier

$$p(iu; g_2, g_3) = -p(u; g_2, -g_3)$$

équivaut à celle-ci

$$-\frac{1+k^2}{3\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}\frac{1}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{iu}{\lambda}, k\right)} = \frac{1+k'^2}{3\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}\frac{1}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{\lambda}, k'\right)},$$

ou, en tenant compte de la relation $k^2 + k'^2 = 1$ et en posant $\frac{u}{\lambda} = v$

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2(iv, k)} + \frac{1}{\operatorname{sn}^2(v, k')} = 1,$$

or cette égalité résulte immédiatement de la formule suivante, démontrée au n° 105

$$\operatorname{sn}(iv, k) = \frac{i \operatorname{sn}(v, k')}{\operatorname{cn}(v, k')}.$$

Variation des valeurs réelles de pu. — Partons de la formule

$$pu = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{\lambda}\right)}.$$

Quand $\frac{u}{\lambda}$ croît de 0 à K, $\operatorname{sn}\frac{u}{\lambda}$ croît de 0 à 1; en même temps u croît de 0 à ω et pu décroît de $+\infty$ à e_1.

Si l'on pose $\frac{u}{\lambda} = K + it$ et si l'on fait varier t de 0 à K', $\operatorname{sn}^2\frac{u}{\lambda}$ varie de 1 à $\frac{1}{k^2} = \frac{e_1 - e_3}{e_2 - e_3}$; en même temps, on a

$$u = \omega + it_1;$$

t_1 croissant par valeurs réelles de 0 à ω', pu va constamment en décroissant depuis e_1 jusqu'à e_2.

Si l'on pose $\frac{u}{\lambda} = iK' + t$ et si l'on fait croître t de 0 à K, $\operatorname{sn}^2\frac{u}{\lambda}$ décroît de ∞ à $\frac{1}{k^2}$; en même temps, on a

$$u = \omega' + t_1;$$

t_1 croissant par valeurs réelles de o à ω, pu croît constamment de e_3 à e_2.

Enfin posons $u = it$, faisons croître t de o à $\frac{\omega'}{i}$ et servons-nous de la formule

$$p(it; g_2, g_3) = -p(t; g_2, -g_3).$$

Les périodes de la fonction écrite au second membre sont $\frac{2\omega'}{i}$ et $2i\omega$, puisqu'en changeant le signe de g_3 on change k en k', par suite K en K', par suite ω et ω' en $\frac{\omega'}{i}$ et $i\omega$. D'après cela, quand t varie de o à $\frac{\omega'}{i}$, nous sommes dans un cas déjà étudié; $p(u; g_2, -g_3)$ décroît de l'infini à la plus grande des racines de l'équation

$$4y^3 - g_2 y + g_3 = 0,$$

c'est-à-dire $-e_3$. Ainsi, t variant de o à $\frac{\omega'}{i}$, $p(t; g_2, -g_3)$ décroît de $+\infty$ à $-e_3$ et par suite $p(u; g_2, g_3)$ croît de $-\infty$ à e_3.

En résumé :

1° Quand u croît par valeurs réelles de o à ω, pu décroît de $+\infty$ à e_1;

2° Quand on a $u = \omega + it$ et que t croît par valeurs réelles de o à $\frac{\omega'}{i}$, pu décroît de e_1 à e_2;

3° Quand on a $u = \omega' + t$ et que t croît par valeurs réelles de o à ω, pu croît de e_3 à e_2;

4° Quand on a $u = it$ et que t croît par valeurs réelles de o à $\frac{\omega'}{i}$, pu croît de $-\infty$ à e_3.

Cette discussion a été résumée au n° 57. Nous pouvons d'abord en tirer cette conclusion que pu *passe par toute valeur réelle*. D'ailleurs l'équation

$$pu - pv = 0,$$

n'a que deux racines dans un parallélogramme des périodes, puisque le premier membre est une fonction doublement périodique admettant zéro comme pôle double et n'admettant pas d'autres pôles dans un parallélogramme des périodes qui contient

zéro. Les deux racines sont évidemment, à des multiples près des périodes, égales à $+v$ et $-v$.

Nous avons ainsi défini toutes les valeurs de u pour lesquelles la fonction pu est réelle.

Étude de la dérivée pour les valeurs qui rendent la fonction réelle. — D'après l'équation

$$p'^2 u = 4(pu - e_1)(pu - e_2)(pu - e_3),$$

la dérivée $p'u$ est réelle quand pu est supérieure à e_1 ou comprise entre e_2 et e_3; elle est purement imaginaire dans les autres cas. Voyons, avec plus de détails, comment se comporte la dérivée dans les cas examinés dans le paragraphe précédent :

1° Quand u croît de o à ω, pu décroît constamment; la dérivée est réelle et négative;

2° Quand on a $u = \omega + it$ et que t croît de o à $\frac{\omega'}{i}$, pu décroît constamment, $p'u$ est purement imaginaire, la dérivée de pu par rapport à t est négative; cette dérivée est $ip'u$, ainsi $\frac{p'u}{i}$ est positive;

3° Quand on a $u = \omega' + t$ et que t croît de o à ω, pu croît constamment, $p'u$ est réelle et positive.

Dans chacun des cas précédents on a examiné seulement un intervalle correspondant à une demi-période. En se servant de ce que la fonction pu est paire et admet les périodes 2ω, $2\omega'$, on vérifiera sans peine le résultat suivant, se rapportant aux cas où pu est réelle :

La dérivée change de signe quand la partie réelle de u passe par un multiple de ω ou quand le coefficient de i passe par un multiple de $\frac{\omega'}{i}$.

II. — Biquadratique gauche. Surface des ondes.

113. Équations de la biquadratique. — La courbe définie par les équations

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \operatorname{sn} u, \\ y = \operatorname{cn} u, \\ z = \operatorname{dn} u, \end{cases}$$

dans lesquelles u désigne un paramètre variable, est l'intersection de deux surfaces du second degré, puisque l'on a entre x, y, z les deux relations

$$f = x^2 + y^2 - 1 = 0,$$
$$\varphi = k^2 x^2 + z^2 - 1 = 0$$

et, d'autre part, on peut toujours, par une transformation homographique, ramener à cette forme les équations d'une biquadratique gauche. Nous allons indiquer les propriétés les plus simples de cette courbe, en nous servant de la représentation paramétrique précédente.

Pour tous les raisonnements qui suivent, il importe de faire choix d'un système de périodes qui appartiennent à la fois aux trois fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$. Or ces trois fonctions admettent toutes les trois les deux périodes $4K$ et $4iK'$. Envisagées à ce point de vue, ce sont des fonctions elliptiques que l'on pourrait exprimer rationnellement à l'aide de la fonction $p(u|2K, 2iK')$, construite avec ces mêmes périodes, et de la dérivée de cette fonction.

Soit P un parallélogramme des périodes $4K$ et $4iK'$ construit sur les deux périodes communes à $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$. Nous allons montrer d'abord qu'à chaque point M de la biquadratique, les relations (1) font correspondre une seule valeur de u dans le parallélogramme P. En effet, coupons la biquadratique par un plan

$$x = x_1;$$

nous obtiendrons quatre points M_1, M_2, M_3, M_4, en associant à $x = x_1$, les quatre systèmes de valeurs

$$y = \pm\sqrt{1 - x_1^2}, \qquad z = \pm\sqrt{1 - k^2 x_1^2}.$$

D'autre part, l'équation $x = x_1$ donne

$$\operatorname{sn} u - x_1 = 0,$$

la fonction elliptique $\operatorname{sn} u - x_1$ ayant dans le parallélogramme P des périodes $4K$ et $4iK'$ quatre pôles simples, à savoir les pôles de $\operatorname{sn} u$, y possède quatre zéros u_1, u_2, u_3, u_4. Si l'on prend successivement ces quatre valeurs de u, à chacune d'elles correspond un point de la courbe dans le plan $x = x_1$. On obtient ainsi d'une autre manière les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4. Si alors on fait

choix d'un de ces points, le point M_1, par exemple, il lui correspond dans le parallélogramme P une seule valeur de u, la valeur $u = u_1$. Donc à un point M_1 de la biquadratique correspond, dans P, une seule valeur u_1 de u : dans le plan tout entier sur lequel on figure la variable u, il correspond au point M_1 une infinité de valeurs de u données par la formule

$$u = u_1 + 4m\mathrm{K} + 4ni\mathrm{K}',$$

m et n entiers. On a donc une représentation paramétrique parfaite de la courbe.

Remarque. — Si l'on se donne la valeur de x, $x = x_1$, et si l'on appelle u_1 l'une des racines de l'équation $\operatorname{sn} u - x_1 = 0$ dans P, les autres u_2, u_3, u_4 sont données par

$$\operatorname{sn} u - \operatorname{sn} u_1 = 0;$$

elles sont homologues des points

$$2\mathrm{K} - u_1, \quad 2i\mathrm{K}' + u_1, \quad 2\mathrm{K} + 2i\mathrm{K}' - u_1.$$

114. **Forme de la courbe.** — On aperçoit immédiatement la forme de la courbe, en remarquant qu'elle est symétrique par rapport aux plans de coordonnées, et qu'elle se projette sur xOy suivant un cercle, sur xOz suivant une ellipse, sur yOz suivant une hyperbole.

Mais voyons comment il faut faire varier l'argument pour obtenir tous les points réels de la courbe ; x et y étant supposés réels, la relation

$$x^2 + y^2 = 1$$

montre que chacune des quantités $\operatorname{sn}^2 u$, $\operatorname{cn}^2 u$ est plus petite que 1 et l'on en conclut que u est réel, à des multiples près des quantités $2\mathrm{K}$ et $2i\mathrm{K}'$.

Les formules relatives à la périodicité des fonctions sn, cn, dn font voir que les points u et $u + 2\mathrm{K}$ sont symétriques par rapport à l'axe Oz ; les points u et $u + 2i\mathrm{K}'$ sont symétriques par rapport à l'axe Ox.

Il suffit donc déjà de faire varier u de 0 à $2\mathrm{K}$. De plus les for-

mules

$$\operatorname{sn}(2K - u) = \operatorname{sn} u,$$
$$\operatorname{cn}(2K - u) = -\operatorname{cn} u,$$
$$\operatorname{dn}(2K - u) = \operatorname{dn} u$$

montrent que les points u et $2K - u$ sont symétriques par rapport au plan des zx. Nous ferons donc varier u seulement depuis o jusqu'à K. Nous obtenons ainsi un arc BA de la courbe situé au-dessus du plan des xy, allant d'un sommet situé dans le plan des yz à un sommet situé dans le plan des zx. Il reste ensuite à compléter la courbe en se servant des symétries indiquées.

115. Condition pour que quatre points de la courbe soient dans un même plan. — L'équation que détermine les paramètres des points d'intersection de la courbe avec le plan

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

est

(2) $$A \operatorname{sn} u + B \operatorname{cn} u + C \operatorname{dn} u + D = 0.$$

Le premier membre est une fonction doublement périodique aux périodes $4K$ et $4iK'$ admettant dans un parallélogramme des périodes quatre infinis qui sont les zéros de $\Theta(u)$, par exemple les points

$$iK', \quad iK' + 2K, \quad -iK', \quad -iK' + 2K.$$

La fonction (2) a donc dans un parallélogramme quatre zéros u_1, u_2, u_3, u_4 correspondant aux quatre points d'intersection du plan avec la courbe. La somme des zéros ne diffère de la somme des infinis que par des multiples des périodes $4K$ et $4iK'$: on a donc

(3) $$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 4mK + 4niK',$$

m et n entiers. Cette condition nécessaire pour que quatre points soient dans un plan est suffisante. On le voit comme pour trois points en ligne droite sur une cubique plane (n° 59).

Plans bitangents menés par une tangente donnée. — Soit u_1 le paramètre du point de contact M_1 de la tangente donnée et u le

paramètre du deuxième point de contact M, on a

$$2u + 2u_1 = 4mK + 4niK',$$
$$u = -u_1 + 2mK + 2niK'.$$

Comme deux valeurs de u qui ne diffèrent que par des multiples de $4K$ et $4iK'$ donnent le même point, il suffit de donner à chacun des nombres entiers m et n les valeurs 0 et 1 et, par suite de considérer quatre valeurs de u, savoir

$$-u_1, \quad -u_1 + 2K, \quad -u_1 + 2iK', \quad -u_1 + 2K + 2iK'.$$

Il y a donc quatre plans bitangents qui passent par la tangente en M_1; les points de contact sont les symétriques du point M_1 par rapport aux trois plans de coordonnées et par rapport à l'origine. On voit de plus que les quatre plans bitangents menés par la tangente en M_1 sont les plans tangents aux quatre cônes du second ordre passant par la biquadratique (trois de ces cônes se réduisent ici à des cylindres).

Il est facile de déduire de là que *le rapport anharmonique des quatre plans bitangents menés par la tangente en* M_1 *reste fixe quand le point* M_1 *se déplace sur la courbe*. En effet, les équations des quatre cônes sont

$$f \equiv x^2 + y^2 - 1 = 0,$$
$$\varphi \equiv k^2x^2 + z^2 - 1 = 0,$$
$$\varphi - k^2 f = 0,$$
$$\varphi - f = 0.$$

Les équations des plans tangents au point M_1 sont de la forme

$$P = 0, \qquad Q - k^2P = 0,$$
$$Q = 0, \qquad Q - P = 0;$$

le rapport anharmonique de ces quatre plans est égal à k^2. Il est constant et l'on voit que sa valeur donne le carré du module des fonctions elliptiques qui ont servi à la représentation paramétrique.

Si l'on prend la perspective de la biquadratique, le point de vue étant au point M_1 de la courbe, on obtient une cubique qui passe par la trace m_1 de la tangente en M_1; les plans que l'on peut

mener par cette tangente et les tangentes à la courbe de l'espace ont pour traces les tangentes à la cubique menées par le point m_1. D'où ce théorème :

D'un point pris sur une cubique on peut encore mener quatre tangentes à la cubique et le rapport anharmonique de ces quatre tangentes est constant.

Points de rencontre de deux tangentes à la biquadratique. — D'après ce que nous venons de voir, si deux tangentes sont dans un même plan et ne sont pas parallèles, leur point de rencontre est situé dans l'un des plans de coordonnées. Pour avoir le lieu de ceux de ces points qui sont situés dans le plan $x = 0$, par exemple, il suffit de chercher la courbe décrite dans ce plan par la trace de la tangente en un point variable de la biquadratique. On trouve sans peine que ce lieu peut être représenté par les équations

$$y = \frac{1}{\operatorname{cn} u}, \qquad z = \frac{1}{\operatorname{dn} u},$$

et qu'il est du quatrième degré.

Cette ligne et les lignes analogues situées dans les autres plans de coordonnées et le plan de l'infini sont les lignes doubles de la surface du huitième ordre engendrée par les tangentes à la biquadratique.

116. Plans osculateurs menés à la courbe par un point de la courbe. — Supposons que trois des quatre points d'intersection de la courbe avec un plan soient confondus. La relation entre les paramètres de ces quatre points devient

$$u_1 + 3u = 4mK + 4niK'$$

ou bien

$$u = -\frac{u_1}{3} + \frac{m}{3}4K + \frac{n}{3}4iK'.$$

Il suffit de donner à chacun des nombres entiers m et n les valeurs 0, 1, 2. Il y a donc neuf plans osculateurs menés à la courbe, par le point M_1. Quand on projette la courbe, le point de vue étant en M_1, les traces de ces plans deviennent les tangentes d'inflexion de la cubique.

Plans surosculateurs. — Si les quatre points d'intersection de la courbe avec un plan viennent se confondre, la relation entre les paramètres de ces quatre points devient

$$4u = 4mK + 4niK'$$

ou bien

$$u = mK + niK'.$$

Chacun des entiers m et n pouvant prendre quatre valeurs 0, 1, 2, 3, on trouve 16 points. Ces points sont les sommets de la courbe : un des plans correspondants est la limite d'un plan bitangent dont les deux points de contact sont venus se confondre.

117. **Détermination des surfaces du second ordre passant par la biquadratique.** — Considérons une corde joignant deux points quelconques M_1, M_2 de la biquadratique ; il existe une surface du second ordre S passant par la courbe gauche et admettant M_1M_2 comme génératrice rectiligne. Si l'on mène un plan par la corde M_1M_2 et si M'_1, M'_2 sont les deux nouveaux points d'intersection de la courbe par ce plan, la droite $M'_1M'_2$ est une génératrice de la surface S et une génératrice du second système, en appelant premier système celui auquel appartient la droite M_1M_2. En tenant compte de la relation qui exprime que les quatre points M_1, M_2, M'_1, M'_2 sont dans un même plan

$$u_1 + u_2 + u'_1 + u'_2 = 4mK + 4niK',$$

on voit qu'*une génératrice d'un système déterminé de* S *rencontre la biquadratique en deux points dont les arguments ont une somme constante.*

La valeur de la constante change seulement de signe quand on passe d'un système de génératrices à l'autre pour une même surface du second ordre ; elle est égale à une demi-période 0, $2K$, $2iK'$, ou $2K + 2iK'$ quand la surface est l'un des quatre cônes du second ordre qui passent par la biquadratique.

Comme application, nous allons considérer des polygones dont les côtés sont des génératrices d'une surface S passant par la biquadratique et dont les sommets sont sur la courbe, et nous chercherons la condition pour qu'un polygone ainsi défini se ferme.

Les arguments de deux sommets consécutifs sont liés par les

relations suivantes, dont les deux formes correspondent aux deux systèmes de génératrices,

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &\equiv C, \\ -(u_2 + u_3) &\equiv C, \\ u_3 + u_4 &\equiv C, \\ -(u_4 + u_5) &\equiv C, \\ \ldots\ldots&\ldots\ldots, \end{aligned}$$

le signe de congruence $\equiv$ signifiant que l'égalité a lieu à des multiples près des périodes $4K$ et $4iK'$. Si l'on veut, par exemple, avoir un quadrilatère, on exprimera que u_5 ne diffère de u_1 que par des multiples des périodes $4K$ et $4iK'$. En ajoutant membre à membre les équations précédentes on trouve

$$4C = 4mK + 4niK',$$

C doit être un quart de période. Les quadrilatères ne se ferment que si la surface considérée correspond à une telle détermination de C et ils se ferment toujours pour une surface ainsi définie.

Il résulte de ce qui précède qu'une surface du second ordre passant par la biquadratique est caractérisée par un argument elliptique défini au signe près.

118. Équation de la surface des ondes. — Cette surface peut être définie de la façon suivante. Étant donné un ellipsoïde qui, rapporté à trois axes rectangulaires, a pour équation

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0,$$

on le coupe par un plan variable passant par le centre

$$Ax + By + Cz = 0$$

et, sur la normale au plan menée par le centre, on porte à partir de ce point des longueurs égales aux axes de la section.

L'équation qui donne les longueurs des axes de la section est

$$\frac{\alpha^2 A^2}{r^2 - \alpha^2} + \frac{\beta^2 B^2}{r^2 - \beta^2} + \frac{\gamma^2 C^2}{r^2 - \gamma^2} = 0.$$

Pour l'un des points x, y, z correspondant au plan A, B, C on a

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C}, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

de sorte que l'équation de la surface est

$$\frac{\alpha^2 x^2}{x^2 + y^2 + z^2 - \alpha^2} + \frac{\beta^2 y^2}{x^2 + y^2 + z^2 - \beta^2} + \frac{\gamma^2 z^2}{x^2 + y^2 + z^2 - \gamma^2} = 0.$$

En chassant les dénominateurs et en supprimant le facteur $x^2 + y^2 + z^2$ on obtient

$$\begin{aligned}&(x^2 + y^2 + z^2)(\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2)\\ &\quad - (\beta^2 + \gamma^2)\alpha^2 x^2 - (\gamma^2 + \alpha^2)\beta^2 y^2 - (\alpha^2 + \beta^2)\gamma^2 z^2 + \alpha^2\beta^2\gamma^2 = 0.\end{aligned}$$

La trace de la surface sur chacun des plans de coordonnées se décompose en deux coniques. Il est facile de le voir en se reportant à la définition géométrique des points du lieu. Si l'on coupe l'ellipsoïde par un plan tournant autour de l'un des axes, Oy par exemple, l'un des axes de la section est constamment égal à l'axe moyen β, l'autre est un diamètre de l'ellipse principale située dans le plan zOx. Les points correspondants du lieu sont dans le plan zOx et ils sont situés sur un cercle de centre O et de rayon β et sur l'ellipse que l'on obtient en faisant tourner d'un angle droit l'ellipse principale. La trace de la surface est donc représentée par l'ensemble des deux équations

$$y = 0, \qquad (x^2 + z^2 - \beta^2)(\alpha^2 x^2 + \gamma^2 z^2 - \alpha^2\gamma^2) = 0;$$

on trouverait de même pour les autres traces

$$\begin{aligned}z &= 0, \qquad (x^2 + y^2 - \gamma^2)(\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 - \alpha^2\beta^2) = 0,\\ x &= 0, \qquad (y^2 + z^2 - \alpha^2)(\beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 - \beta^2\gamma^2) = 0.\end{aligned}$$

Ceci conduit à mettre l'équation de la surface sous la forme

$$(s) \qquad \left\{\begin{aligned}&(x^2 + y^2 + z^2 - \beta^2)(\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 - \alpha^2\gamma^2)\\ &\qquad + (\beta^2 - \alpha^2)(\beta^2 - \gamma^2)y^2 = 0.\end{aligned}\right.$$

C'est cette forme dont nous aurons surtout à nous servir. Il est évident que l'on aurait une forme analogue correspondant à chacun des autres plans de coordonnées.

119. Expression des coordonnées d'un point de la surface en fonction de deux paramètres elliptiques. — On peut exprimer les coordonnées d'un point variable de la surface en fonction de deux paramètres elliptiques au moyen des formules

$$\begin{aligned} x &= \beta\,\mathrm{sn}(u, k)\,\mathrm{dn}(v, l), \\ y &= \alpha\,\mathrm{cn}(u, k)\,\mathrm{cn}(v, l), \\ z &= \alpha\,\mathrm{dn}(u, k)\,\mathrm{sn}(v, l), \end{aligned}$$

le module k des fonctions de l'argument u et le module l des fonctions de l'argument v étant définis par les égalités

$$k^2 = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\gamma^2 - \alpha^2}, \qquad k'^2 = \frac{\gamma^2 - \beta^2}{\gamma^2 - \alpha^2}, \qquad l^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\,\frac{\gamma^2 - \beta^2}{\gamma^2 - \alpha^2}, \qquad l'^2 = \frac{\gamma^2}{\beta^2}\,\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\gamma^2 - \alpha^2},$$

où l'on suppose

$$\alpha < \beta < \gamma.$$

Nous écrirons les formules précédentes sous la forme abrégée

$$\begin{aligned} x &= \beta s d_1, \\ y &= \alpha c c_1, \\ z &= \alpha d s_1, \end{aligned}$$

en attribuant l'indice 1 aux fonctions de l'argument v.

Vérifions d'abord que les valeurs de x, y, z données par ces égalités satisfont à l'équation de la surface quels que soient u et v.

En élevant au carré les deux membres de chaque égalité et en exprimant les fonctions elliptiques de chaque argument à l'aide du sinus amplitude correspondant, on trouve successivement

$$\begin{aligned} x^2 &= \beta^2 s^2 \qquad\qquad\quad - \beta^2 l^2 s^2 s_1^2, \\ y^2 - \alpha^2 &= -\alpha^2 s^2 - \alpha^2 s_1^2 + \alpha^2 s^2 s_1^2, \\ z^2 &= \qquad\qquad\quad \alpha^2 s_1^2 - \alpha^2 k^2 s^2 s_1^2. \end{aligned}$$

On en déduit

$$x^2 + y^2 + z^2 - \beta^2 = (\beta^2 - \alpha^2)(s^2 - 1),$$

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 - \alpha^2\gamma^2 = \alpha^2(\gamma^2 - \beta^2)(s_1^2 - 1),$$

et comme on a posé

$$y^2 = \alpha^2(1 - s^2)(1 - s_1^2),$$

on voit que l'on a bien, quels que soient s et s_1,

$$(x^2+y^2+z^2-\beta^2)(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2-\alpha^2\gamma^2)=(\beta^2-\alpha^2)(\gamma^2-\beta^2)y^2.$$

120. **Intervalles dans lesquels il suffit de faire varier la partie réelle et le coefficient de i de chacun des arguments pour avoir toute la surface.** — Les trois fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ admettent comme périodes $4K$ et $4iK'$; de même, les trois fonctions $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$ admettent les périodes $4L$ et $4iL'$ (en supposant que L et L' correspondent à l comme K et K' à k). Mais les formules

$$\begin{aligned} &\operatorname{sn}(u+2K)=-\operatorname{sn} u, &\quad &\operatorname{dn}(v+2iL')=-\operatorname{dn} v,\\ &\operatorname{cn}(u+2K)=-\operatorname{cn} u, &\quad &\operatorname{cn}(v+2iL')=-\operatorname{cn} v,\\ &\operatorname{dn}(u+2K)=\operatorname{dn} u, &\quad &\operatorname{sn}(v+2iL')=\operatorname{sn} v,\end{aligned}$$

montrent que les arguments

$$u+2K,\quad v+2iL'$$

donnent le même point que les arguments

$$u,\quad v.$$

On verrait de même que

$$u+2iK',\quad v+2L$$

donnent le même point que

$$u,\quad v,$$

et l'on peut conclure de là qu'il suffit de faire varier la partie imaginaire de u entre deux valeurs différant de $2iK'$ et la partie imaginaire de v entre deux valeurs différant de $2iL'$.

121. **Les lignes paramétriques sont orthogonales.** — Les lignes obtenues en faisant varier un seul des paramètres u et v sont des biquadratiques (*voir* n° 113). Nous allons démontrer que les deux familles de lignes ainsi définies sont orthogonales.

Les cosinus directeurs de la tangente sont proportionnels à x'_u, y'_u, z'_u pour un point de la ligne obtenue en faisant varier le paramètre u; les quantités correspondantes sont proportionnelles à x'_v, y'_v, z'_v pour l'autre ligne; nous avons donc à vérifier que l'on a,

pour un système quelconque de valeurs de u et de v,

$$x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v = 0.$$

Calculons ces dérivées :

$$\begin{aligned} x'_u &= \beta c d d_1, & x'_v &= -\beta l^2 s s_1 c_1, \\ y'_u &= -\alpha s d c_1, & y'_v &= -\alpha c s_1 d_1, \\ z'_u &= -\alpha k^2 s c s_1, & z'_v &= \alpha d c_1 d_1. \end{aligned}$$

Dans chacun des produits $x'_u x'_v$, $y'_u y'_v$, $z'_u z'_v$, on trouve en facteur

$$s c d s_1 c_1 d_1,$$

et l'égalité à vérifier se réduit à l'identité

$$-\beta^2 l^2 + \alpha^2 - \alpha^2 k^2 = 0,$$

évidente, si l'on se rappelle que $l^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2} k'^2$ (n° 119).

122. **Points singuliers.** — Nous avons vu que la trace de la surface sur l'un des plans de coordonnées se décompose en deux coniques; les quatre points communs à ces deux coniques sont des points coniques de la surface. Considérons, en particulier, la trace sur le plan zOx. On doit avoir

$$y = 0, \qquad \text{cn}\, u\, \text{cn}\, v = 0.$$

Pour cn $u = 0$, on a $s^2 = 1$, et l'équation (n° 119),

$$x^2 + y^2 + z^2 - \beta^2 = (\beta^2 - \alpha^2)(s^2 - 1)$$

montre que les points correspondants du lieu sont les points du cercle

$$x^2 + z^2 - \beta^2 = 0.$$

Pour cn $v = 0$, on a $s_1^2 = 1$, et l'équation

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 - \alpha^2 \gamma^2 = \alpha^2(\gamma^2 - \beta^2)(s_1^2 - 1)$$

montre que les points correspondants du lieu sont les points de l'ellipse

$$\alpha^2 x^2 + \gamma^2 z^2 = \alpha^2 \gamma^2.$$

L'un des points d'intersection du cercle et de l'ellipse est donné

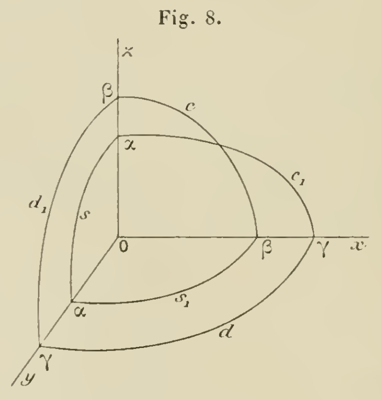
par les valeurs des paramètres u et v telles que l'on a à la fois

$$\operatorname{cn} u = 0, \qquad \operatorname{cn} v = 0.$$

Mais chacune des trois dérivées x'_u, y'_u, z'_u contient en facteur c ou c_1 et il en est de même pour x'_v, y'_v, z'_v. Donc, les développements de x, y, z, suivant les puissances des accroissements Δu, Δv donnés aux paramètres à partir du point considéré, commencent par des termes du second degré; le point est point conique de la surface. On vérifie sans peine que ses coordonnées annulent les trois dérivées f'_x, f'_y, f'_z du premier membre de l'équation de la surface.

Nous avons ainsi quatre points doubles réels dans le plan zOx. On les obtient comme points du lieu lorsqu'on coupe l'ellipsoïde E par un plan passant par l'axe moyen et donnant comme section un cercle.

Fig. 8.



On trouverait de même quatre points coniques de la surface dans chacun des autres plans de coordonnées et il résulte de la définition géométrique des points du lieu qu'il n'y a pas d'autres points coniques à distance finie. La forme de l'équation de la surface conduit à considérer comme points coniques les points à l'infini sur les quatre génératrices communes aux deux cônes

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \qquad \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 = 0.$$

On a donc en tout seize points singuliers; quatre de ces points seulement sont réels : ce sont les quatre points coniques situés dans le plan zOy.

123. Plans tangents singuliers. — Un plan perpendiculaire à un plan principal, et dont la trace sur ce plan est une tangente commune aux deux coniques en lesquelles se décompose la section principale correspondante, est un plan tangent singulier : il touche la surface en une infinité de points situés sur un cercle. Considérons, en particulier, la trace de la surface sur le plan des xz

$$x^2 + z^2 - \beta^2 = 0, \qquad \frac{x^2}{\gamma^2} + \frac{z^2}{\alpha^2} - 1 = 0,$$

et cherchons d'abord les tangentes communes à ces deux coniques. Si une droite

$$ux + wz + 1 = 0$$

est tangente à chacune de ces coniques, on a

$$\beta^2 u^2 + \beta^2 w^2 = 1, \qquad \gamma^2 u^2 + \alpha^2 w^2 = 1.$$

En résolvant ces deux équations, on obtient

$$\beta^2 u^2 = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\gamma^2 - \alpha^2}, \qquad \beta u = \pm k,$$

$$\beta^2 w^2 = \frac{\gamma^2 - \beta^2}{\gamma^2 - \alpha^2}, \qquad \beta w = \pm k'.$$

L'une de ces tangentes a donc pour équation

$$kx + k'z - \beta = 0.$$

Coupons la surface par le plan perpendiculaire à zOx et ayant pour trace cette tangente commune. En remplaçant dans l'équation du plan x et z par leurs valeurs en fonction des paramètres elliptiques, nous avons, entre les paramètres d'un point de la section, la relation

$$k\beta\, sd_1 + k'\alpha\, ds_1 - \beta = 0,$$

et, comme on a $k'\frac{\alpha}{\beta} = l$, cette relation peut s'écrire

$$ksd_1 + lds_1 - 1 = 0.$$

Pour vérifier que la ligne définie par cette relation est une conique comptée deux fois, nous allons la couper par une surface

$$v = \text{const.}$$

et montrer que les points d'intersection sont deux à deux confondus. Les valeurs de s et de d correspondant aux points d'intersection sont données par les deux équations

$$\begin{aligned} ksd_1 + lds_1 &= 1, \\ k^2 s^2 + d^2 &= 1. \end{aligned}$$

Or, l'équation du second degré qui donne les valeurs de s a ses deux racines égales ; tandis que si l'on avait coupé la surface par un plan quelconque parallèle à Oy, le même calcul aurait conduit à deux valeurs distinctes de s. Donc le plan

$$kx + k'z = \beta$$

coupe la surface suivant une conique comptée deux fois et, comme il n'y a pas de ligne double sur la surface, il est tangent tout le long de cette conique.

On peut vérifier le résultat précédent au moyen d'un calcul plus symétrique, en formant une combinaison homogène des deux équations précédentes en s et d, savoir

$$(k^2 s^2 + d^2)(l^2 s_1^2 + d_1^2) - (ksd_1 + dls_1)^2 = 0.$$

Cette équation donne les valeurs de $\frac{s}{d}\cdot$ Or, en transformant le premier membre d'après l'identité

$$(A^2 + B^2)(A'^2 + B'^2) - (AB' + BA')^2 = (AA' - BB')^2,$$

on voit qu'il se réduit à

$$(klss_1 - dd_1)^2,$$

et l'on retrouve que les points d'intersection sont deux à deux confondus. Mais on peut, en outre, déduire de ce calcul une forme de l'équation de la surface mettant en évidence les plans tangents singuliers perpendiculaires au plan zOx. Nous avons remarqué qu'on a l'identité

$$1 - (ksd_1 + dls_1)^2 \equiv (klss_1 - dd_1)^2,$$

en supposant s et d d'une part, s_1 et d_1 d'autre part, liés par les relations

$$k^2 s^2 + d^2 = 1, \qquad l^2 s_1^2 + d_1^2 = 1.$$

Cette identité peut s'écrire

$$-(ksd_1 + dls_1 - 1)(ksd_1 + dls_1 + 1) = (klss_1 - dd_1)^2,$$

et, en y changeant s_1 en $-s_1$, on en déduit

$$-(ksd_1 - dls_1 - 1)(ksd_1 - dls_1 + 1) = (klss_1 + dd_1)^2.$$

Multiplions membre à membre ces deux identités et désignons les parenthèses situées dans les premiers membres par q_1, q_2, q_3, q_4, nous obtenons la nouvelle identité

$$q_1 q_2 q_3 q_4 = (k^2 l^2 s^2 s_1^2 - d^2 d_1^2)^2,$$

qui peut encore s'écrire

$$q_1 q_2 q_3 q_4 = (k^2 s^2 + l^2 s_1^2 - 1)^2,$$

et qui donne la forme cherchée de l'équation de la surface; il suffit d'y remplacer s, d, s_1, d_1 en fonction des coordonnées x, y, z du point correspondant de la surface;

$$q_1 = ksd_1 + ls_1 d - 1$$

devient

$$Q_1 = \frac{1}{\beta}(kx + k'z - \beta);$$

q_2, q_3, q_4 se transforment d'une façon analogue. D'autre part

$$l^2 s_1^2 + k^2 s^2 - 1$$

devient (n° 119), en désignant par λ et μ des constantes,

$$\varphi(x, y, z) = \lambda^2(\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 - \alpha^2\beta^2) + \mu^2(x^2 + y^2 + z^2 - \alpha^2) - 1,$$

et l'on obtient pour la surface l'équation

$$Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 = \varphi^2.$$

Cette équation montre d'abord que la section de la surface des ondes par le plan $Q_1 = 0$ est la conique section de la surface φ par le même plan, comptée deux fois. Cette conique est un cercle, car en cherchant les plans réels qui donnent des sections circulaires dans la surface φ, on trouve que ces plans sont parallèles aux deux plans

$$(\alpha^2 - \beta^2)x^2 + (\gamma^2 - \beta^2)z^2 = 0,$$

ou bien

$$k^2 x^2 - k'^2 z^2 = 0,$$
$$(kx + k'z)(kx - k'z) = 0.$$

Nous avons trouvé quatre plans tangents singuliers correspondant au plan zOx; on en trouverait de même quatre autres correspondant aux deux autres plans de coordonnées, et quatre autres qu'on peut définir comme les plans tangents communs aux deux cônes

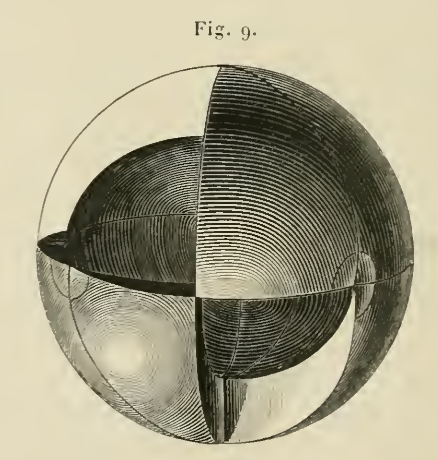
$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \qquad \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 = 0.$$

On a ainsi seize plans tangents singuliers dont chacun touche la surface tout le long d'une conique.

124. Forme de la surface. Distribution des valeurs des paramètres. — La *fig.* 8 [1] indique les sections de la surface par les trois plans de coordonnées. La surface se compose de deux nappes réunies par quatre points coniques et dont l'une est tout entière située à l'intérieur de l'autre.

Elle est représentée, en perspective, dans la *fig.* 9 : on a

Fig. 9.



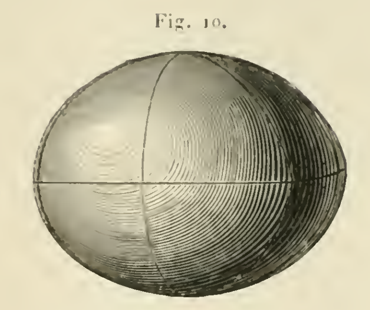
ménagé une ouverture qui permet de voir la nappe intérieure.

---

[1] Ces figures sont empruntées au *Traité de Geométrie* de MM. Rouché et de Comberousse; Gauthier-Villars.

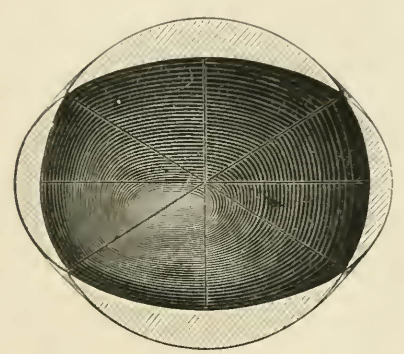
On a représenté (*fig.* 10) le corps solide ou noyau qui serait re-

Fig. 10.



couvert par la nappe intérieure seule, et (*fig.* 11) la section de la surface par un plan passant par les quatre points coniques.

Fig. 11.



Cherchons entre quelles limites varient s et s_1. D'après la relation

$$x^2+y^2+z^2-\alpha^2=(\beta^2-\alpha^2)s^2,$$

si nous coupons la surface par une sphère concentrique, tout le long de l'intersection s reste constant, x, y, z sont à des facteurs constants près égaux à d_1, c_1, s_1; l'intersection est une biquadratique. Le carré du rayon de la sphère peut être représenté par

$$\rho^2=\alpha^2+(\beta^2-\alpha^2)s^2.$$

Pour que la sphère rencontre la surface, il faut que ρ^2 soit positif et compris entre α^2 et γ^2 : s^2 doit donc être positif et compris entre o et $\frac{1}{k^2}$.

Quand s^2 varie de o à 1, la biquadratique formée de deux ovales séparées par le plan yOz décrit la nappe intérieure de la surface. Quand s^2 varie de 1 à $\frac{1}{k^2}$ la biquadratique formée de deux ovales séparées par le plan xOy décrit la nappe extérieure.

De même, d'après la relation

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 - \alpha^2 \beta^2 = \alpha^2(\gamma^2 - \beta^2) s_1^2,$$

on voit que s_1^2 varie entre o et $\frac{1}{l^2}$. A une valeur donnée de s_1 correspondent des points situés sur une biquadratique; quand s_1^2 varie de o à 1 la biquadratique formée de deux ovales séparées par xOy décrit la nappe intérieure; quand s_1^2 varie de 1 à $\frac{1}{l^2}$ la biquadratique formée de deux ovales séparées par yOz décrit la nappe extérieure.

On déduit aisément de ce qui précède le moyen de déterminer la nature des arguments qui correspondent à un point pris sur l'une des nappes de la surface et la position du chemin décrit par le point M d'arguments u et v, quand on fait varier un seul de ces arguments.

Prenons, par exemple, un point M_0 sur la nappe intérieure et dans le trièdre des coordonnées positives; l'un des systèmes d'arguments correspondants sera formé de deux valeurs réelles u_0, v_0 telles que l'on ait

$$0 < u_0 < K, \qquad 0 < v_0 < L.$$

Nous avons déjà remarqué que le même point est donné par les valeurs

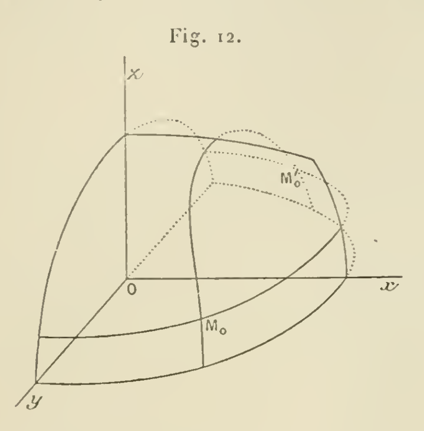
$$(2K - u_0,\ 2L - v_0)$$

des arguments, et il est évident qu'on peut partir de M_0 avec le système u_0, v_0 et revenir au même point avec le système $(2K - u_0, 2L - v_0)$ en faisant varier successivement un seul des arguments.

Voyons, en détail, comment se déplace le point M d'argument u, v, quand, u restant égal à u_0, v varie de v_0 à $2L - v_0$ puis, quand, v restant égal à $2L - v_0$, u varie de u_0 à $2K - u_0$. Pour $u = u_0$, on a une biquadratique formée de deux ovales que sépare le plan des yz. Comme nous ne considérons que des va-

leurs positives de v, le point M restera sur l'ovale de droite; soit C_v cette ovale. De même, pour $v = v_0$, on a une biquadratique formée de deux ovales séparées par le plan des xy. Le point M restera sur l'ovale située au-dessus de ce plan; soit C_u cette ovale. Cela posé, quand v varie de v_0 à L, puis de L à $2L - v_0$, le point M se déplace sur C_v depuis M_0 jusqu'au point le plus haut de l'ovale, traverse le plan des zx et vient en M'_0, symétrique de M_0 par rapport à ce plan. Quand ensuite u varie de u_0 à K, puis de K à $2K - u_0$, le point M se déplace sur C_u depuis M'_0 jusqu'au point de la courbe C_u située dans le plan zOx et dont l'x est positive, traverse le plan zOx et revient en M_0 (*fig.* 12).

Fig. 12.



Remarquons encore que les points de C_u où la tangente est parallèle à Oy sont sur le cercle

$$x^2 + y^2 - \beta^2 = 0,$$

ou plus exactement sur l'un des deux arcs de ce cercle qui appartiennent à la trace de la nappe intérieure; les points de C_v où la tangente est parallèle à Oy sont sur l'ellipse

$$\alpha^2 x^2 + \gamma^2 z^2 - \alpha^2 \gamma^2 = 0,$$

ou mieux sur l'un des deux arcs de cette ellipse, qui appartiennent à la trace de la nappe intérieure.

Pour un point de la nappe extérieure l'un des systèmes de valeurs de u, v est de la forme

$$u = K + ia', \qquad v = L + ib',$$

a' et b' étant réels ; l'autre système est alors formé des valeurs conjuguées

$$2K - u = K - ia', \qquad 2L - v = L - ib'.$$

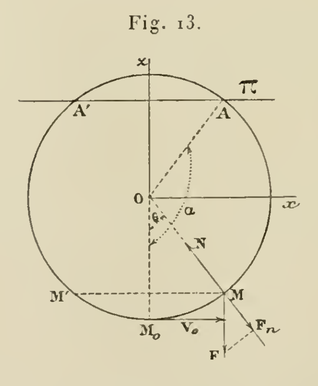
On verra, comme dans le cas précédent, comment on peut passer d'une manière continue du premier système au second.

Remarque. — Le fait qu'à un point donné correspondent deux systèmes distincts de valeurs de u et v, donne lieu à une complication analogue, d'une certaine façon, à celle qu'on rencontre dans l'étude des fonctions algébriques. La discussion précédente montre comment on pourrait faire disparaître, en partie, cette complication, en considérant la surface des ondes comme formée de deux feuillets réunis suivant des lignes joignant deux des points coniques.

III. — Pendule simple. Élastique plane. Corde a sauter. Mouvement a la Poinsot.

125. Pendule simple. — Quoique la théorie du pendule simple se déduise comme cas particulier de celle du pendule sphérique que nous avons traitée à l'aide des fonctions p et σ, nous la reprenons ici à titre d'application des fonctions sn, cn, dn.

Fig. 13.



Prenons un axe Oz vertical et dirigé vers le haut, l'origine étant au point de suspension du pendule, et supposons le mobile lancé du point le plus bas $M_0(z = -l)$ avec une vitesse initiale v_0;

le théorème des forces vives donne

$$v^2 = 2g(a - z) \qquad \text{avec} \qquad a = -l + \frac{v_0^2}{2g}.$$

1° Supposons d'abord que la droite H$(z = a)$ coupe le cercle en A, A', c'est-à-dire que l'on ait $a < l$, ou $v_0 < 2\sqrt{lg}$. Le mouvement consistera alors en oscillations isochrones entre A et A'. Prenons pour variable l'angle $M_0OM = \theta$. Nous avons

$$z = -l\cos\theta, \qquad a = -l\cos\alpha,$$

en appelant α l'angle d'écart maximum M_0OA. L'expression de la vitesse est

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{l\,d\theta}{dt}$$

et l'équation des forces vives devient

$$l^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2gl(\cos\theta - \cos\alpha),$$

qu'on peut écrire

$$l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 4g\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$

d'où

$$2\sqrt{\frac{g}{l}}\,dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}.$$

Nous prendrons le signe + en supposant que le mobile monte. En comptant le temps à partir du moment où le mobile part de M_0 et en posant

$$\sin\frac{\theta}{2} = u\sin\frac{\alpha}{2},$$

on a

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,t = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \qquad \left(k^2 = \sin^2\frac{\alpha}{2}\right).$$

On est ainsi ramené à une intégrale elliptique et l'équation ci-dessus résolue par rapport à u peut s'écrire

$$u = \operatorname{sn}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right),$$

c'est-à-dire

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{sn}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right);$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 t\sqrt{\frac{g}{l}}} = \mathrm{dn}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right);$$

on obtient ainsi les coordonnées $l\sin\theta$ et $l\cos\theta$ du mobile en fonction uniforme du temps.

Pour avoir le temps T que met le mobile à aller de M_0 en A, il faut faire varier θ de o à α, c'est-à-dire u de o à 1; donc, en posant

$$K = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

on aura pour T la valeur $K\sqrt{\frac{l}{g}}$ et la durée de l'oscillation simple sera $2K\sqrt{\frac{l}{g}}$. Si l'on ajoute cette quantité à t, le mobile doit prendre la position M' symétrique de M et $\sin\theta$ doit changer de signe, ce qui fournit une vérification de la formule

$$\mathrm{sn}(x + 2K) = -\,\mathrm{sn}\,x.$$

2° Il nous faut maintenant considérer le cas où la droite Π ne rencontre pas le cercle, c'est-à-dire où l'on a $a > l$. L'équation des forces vives $v^2 = 2g(a - z)$ peut s'écrire

$$l^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2g(a + l\cos\theta) = 2g\left(a + l - 2l\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

ou

$$l^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2g(a+l)\left(1 - k^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$

en posant $k^2 = \frac{2l}{a+l}$; k^2 est plus petit que 1 puisque a est plus grand que l. En résolvant par rapport à dt, posant

$$\lambda = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2g(a+l)}}{l},$$

et prenant $u = \sin\frac{\theta}{2}$ comme nouvelle variable, il vient

$$\lambda t = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

d'où, en résolvant par rapport à u, c'est-à-dire en faisant l'inversion

$$u = \operatorname{sn}(\lambda t), \qquad \sin\frac{\theta}{2} = \operatorname{sn}(\lambda t).$$

On en déduit

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(\lambda t)} = \operatorname{cn}(\lambda t).$$

Le temps T que met le mobile à arriver au point le plus haut s'obtient en faisant varier θ de o à π, c'est-à-dire u de o à 1; il est donc $\frac{K}{\lambda}$.

3° Il reste enfin à traiter le cas intermédiaire où la droite Π serait tangente à la circonférence donnée : $a = l$. On peut alors effectuer les intégrations à l'aide de fonctions exponentielles (cas de dégénérescence), car le module k des fonctions elliptiques précédentes devient égal à 1. Revenons, en effet, à l'équation des forces vives $v^2 = 2g(a - z)$, nous l'écrirons

$$l^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2g(l + l\cos\theta) = 4gl\cos^2\frac{\theta}{2},$$

et, en intégrant,

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,t = \log\operatorname{tang}\left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4}\right).$$

La constante d'intégration est nulle puisque t doit s'annuler avec θ. Lorsque t croît indéfiniment, θ tend en croissant vers la limite π; le mobile s'approche indéfiniment du point le plus haut sans jamais l'atteindre. On a alors

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}}{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}, \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \frac{2}{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}},$$

λ étant égal à $\sqrt{\frac{g}{l}}$.

Remarque sur l'interprétation de la période imaginaire $2iK'$. — Plaçons-nous, pour simplifier, dans le premier cas (1°), où le pendule oscille entre les points A et A'. Supposons que la pesanteur change de sens et que le pendule oscille sur l'arc supérieur AzA', entre les mêmes points A et A'. Pour avoir les for-

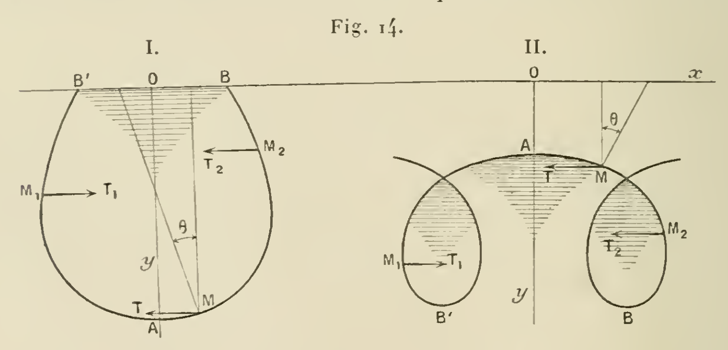
mules relatives à ce nouveau mouvement, il suffit de changer, dans les formules du premier cas (1°), α en $\pi - \alpha$ et, par suite, de remplacer le module $k = \sin\frac{\alpha}{2}$ par son complémentaire $k' = \cos\frac{\alpha}{2}$. Les fonctions elliptiques qui donnent le nouveau mouvement sont donc construites avec le module complémentaire de k et, en particulier, la durée de la nouvelle oscillation simple est $2K'\sqrt{\frac{l}{g}}$ (*Comptes rendus*, t. LXXXVII, p. 1074).

126. Élastique plane sans pression. — Nous avons déjà vu (n° 68) que le problème de l'élastique gauche conduit aux mêmes équations que l'étude du mouvement d'un corps pesant de révolution, suspendu par un point de son axe.

En particulier, le problème de l'élastique plane sans pression conduit aux mêmes équations que l'étude du mouvement d'un pendule simple. C'est ce que nous allons montrer rapidement.

Imaginons une tige élastique dont la fibre moyenne affecte à l'état naturel, la forme d'une courbe plane connue C_0 et soit ρ_0

Fig. 14.



la valeur du rayon de courbure en un point M de cette courbe. Supposons ensuite qu'on déforme la tige en faisant agir sur elle des forces quelconques, mais de telle façon que la fibre moyenne reste plane et prenne une nouvelle forme C. Le rayon de courbure en M devient alors ρ. Dans cette position d'équilibre contraint, les forces élastiques sont déterminées d'après les lois suivantes :

Si l'on coupait la tige en M, pour maintenir l'équilibre il faudrait appliquer à la section en M une force T dans le plan de la courbe C et un couple dont l'axe est perpendiculaire à ce plan

et dont le moment N est proportionnel à la variation de la courbure $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}$:

$$N = B\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right),$$

B désignant un coefficient constant qui dépend de la nature de la tige.

Nous traiterons ici le cas simple où la tige est primitivement *rectiligne*, $\frac{1}{\rho_0} = 0$, et où l'on fait agir seulement sur ses extrémités M_1 et M_2 deux forces T_1 et T_2 situées dans le plan de la courbe d'équilibre et deux couples N_1 et N_2 ayant leurs axes normaux à ce plan. *Les deux forces* T_1 *et* T_2 *sont égales et opposées,* car les seules forces extérieures appliquées à la tige en équilibre étant les forces T_1 et T_2 et les couples N_1 et N_2, la somme des projections de ces forces sur un axe quelconque doit être nulle. Les forces T_1 et T_2 forment alors un couple qui fait équilibre aux couples N_1 et N_2.

Prenons pour axe Ox une droite parallèle à T_1 et T_2. Soit M un point quelconque de la fibre moyenne : si la tige était coupée en M la partie M_1M serait en équilibre sous l'action des forces extérieures suivantes : 1° la force T_1 et le couple N_1 agissant sur l'extrémité M_1; 2° une force T et un couple N agissant sur M; le couple N a pour moment

$$N = \frac{B}{\rho},$$

puisque nous supposons $\frac{1}{\rho_0} = 0$.

Ces forces extérieures appliquées à l'arc M_1M se font équilibre. Donc, T est égal et opposé à T_1. En outre, la somme des moments de toutes les forces extérieures, par rapport à un point du plan doit être nulle. En prenant la somme des moments par rapport à O, nous avons

$$T_1y_1 - Ty - N_1 + N = 0,$$

d'où, en remplaçant T par T_1 et N par $\frac{B}{\rho}$, une équation de la forme

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{c^2}(y - b),$$

c^2 désignant une constante positive et b une autre constante. On peut toujours déplacer l'axe des x parallèlement à lui-même de façon à faire disparaître cette dernière constante et à ramener ainsi l'équation de la courbe à la forme

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y}{c^2}.$$

Nous allons montrer que, lorsqu'un point décrit la courbe élastique avec une vitesse constante, la normale en ce point oscille comme un pendule autour de la perpendiculaire abaissée de ce point sur la ligne d'action des forces T, c'est-à-dire sur Ox (¹).

Soit, en effet, θ l'angle de la normale en M avec cette perpendiculaire; si le point mobile se déplace de ds la normale tourne de l'angle $d\theta$ et l'on a

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} = \frac{y}{c^2},$$

d'où, par différentiation,

$$(1) \qquad \frac{d^2\theta}{ds^2} = \frac{1}{c^2}\frac{dy}{ds} = -\frac{1}{c^2}\sin\theta.$$

Si l'on pose $\frac{s}{c} = \sqrt{\frac{g}{l}}\,t$, on retrouve l'équation du mouvement pendulaire

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta.$$

Pour intégrer l'équation (1), multiplions les deux membres par $\frac{d\theta}{ds}$ et intégrons : il vient

$$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = \frac{2}{c^2}(\cos\theta + \mu),$$

μ désignant une constante arbitraire. On a alors

$$y = \frac{c^2}{\rho} = c^2\frac{d\theta}{ds} = c\sqrt{2(\cos\theta + \mu)}.$$

Trois cas sont à distinguer, correspondant aux trois cas rencontrés dans le pendule simple, suivant que μ est compris entre -1 et $+1$, supérieur à 1, ou égal à 1.

(¹) *Comparer* à Greenhill, *Fonctions elliptiques.*

Premier cas. — Dans le premier cas on peut poser

$$\mu = -\cos\alpha.$$

L'angle θ varie de $-\alpha$ à $+\alpha$; la courbure et l'ordonnée y s'annulent pour $\theta = \alpha$.

On a ainsi la forme de la courbe (*fig.* 14, I). Les points correspondant à $\theta = \pm\alpha$ sont les points B et B'. Cette forme de courbe correspond au mouvement oscillatoire du pendule.

On a trouvé dans ce cas, pour le pendule,

$$\sin\frac{\theta}{2} = k \operatorname{sn} t\sqrt{\frac{g}{l}},$$

avec $k = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot$ On a donc actuellement par le même calcul, en faisant $\frac{s}{c} = t\sqrt{\frac{g}{l}}$,

$$\sin\frac{\theta}{2} = k \operatorname{sn}\frac{s}{c}, \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \operatorname{dn}\frac{s}{c},$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2}{c}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2k}{c}\operatorname{cn}\frac{s}{c},$$

$$y = \frac{c^2}{\rho} = 2kc \operatorname{cn}\frac{s}{c}\cdot$$

Calculons enfin x en fonction de s, on a

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2\frac{s}{c}\cdot$$

D'où, en intégrant de o à s et se rappelant la formule du n° 100

$$\int_0^u k^2 \operatorname{sn}^2 u\, du = -\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} + u\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)},$$

$$x = s\left[1 - 2\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}\right] + 2c\frac{\Theta'\left(\frac{s}{c}\right)}{\Theta\left(\frac{s}{c}\right)}\cdot$$

Deuxième cas. — Si l'on a $\mu > 1$, θ peut varier de o à 2π : y et $\frac{1}{\rho}$ ne s'annulent jamais; la courbe a la forme II de la *fig.* 14.

Ce cas correspond au mouvement révolutif du pendule. On achèverait le calcul comme dans le cas précédent, en employant les mêmes transformations que pour le mouvement révolutif du pendule simple.

Troisième cas. — Si $\mu = 1$, on se trouve dans un cas de dégénérescence. On a alors

$$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = \frac{4}{c^2}\cos^2\frac{\theta}{2},$$

$$\frac{ds}{c} = \frac{d\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}, \qquad \frac{s}{c} = \operatorname{Log}\operatorname{tang}\left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{s}{c}},$$

$$y = 2c\cos\frac{\theta}{2} = \frac{4c}{e^{\frac{s}{c}} + e^{-\frac{s}{c}}},$$

$$dx = \cos\theta\, ds = \left(2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1\right)ds = 2c\cos\frac{\theta}{2}\,\frac{d\theta}{2} - ds,$$

$$x = 2c\sin\frac{\theta}{2} - s = 2c\,\frac{e^{\frac{s}{c}} - e^{-\frac{s}{c}}}{e^{\frac{s}{c}} + e^{-\frac{s}{c}}} - s.$$

La courbe est alors asymptote à l'axe Ox, comme on le voit en faisant tendre θ vers $\pm\pi$, et s vers $\pm\infty$.

127. **Corde à sauter.** — Imaginons une corde homogène dont on tient les deux extrémités et qu'on fait tourner très vite autour de la droite joignant ces deux extrémités. On peut alors négliger l'action de la pesanteur sur les divers éléments de la corde et chercher la figure permanente que prend la corde dans son mouvement. Par rapport à un système d'axes tournant avec la corde, cette figure permanente est une position d'équilibre relatif. D'après la théorie de l'équilibre relatif, on doit exprimer qu'il y a équilibre entre les forces agissant réellement sur chaque élément de la corde et les forces centrifuges.

La force centrifuge agissant sur un élément de masse m est perpendiculaire à l'axe de rotation et répulsive; elle a pour inten-

sité $m\omega^2 r$, ω désignant la vitesse angulaire constante de la rotation et r la distance de l'élément m à l'axe.

En prenant l'axe de rotation pour axe Ox, on est donc ramené à un problème sur l'équilibre des fils que l'on peut énoncer ainsi :

Un fil est attaché en deux points de l'axe Ox *et chaque élément du fil est repoussé par l'axe proportionnellement à sa longueur et à sa distance à l'axe.*

Toutes les forces qui agissent sur le fil rencontrant l'axe Ox, le moment de la tension par rapport à cet axe est constant tout le long du fil; mais, comme le fil est attaché en deux points de l'axe, le moment de la tension aux extrémités est *nul;* ce moment est donc constamment nul et l'on a

$$\mathrm{T}\left(y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds}\right) = 0,$$

d'où

$$\frac{dy}{y} - \frac{dz}{z} = 0, \qquad y = mz,$$

m étant une constante. La figure d'équilibre est donc dans un plan passant par l'axe Ox. Prenons ce plan pour plan des xy, la force agissant sur l'élément ds est perpendiculaire à Ox, répulsive et proportionnelle à l'ordonnée y

$$\mathrm{Y}\,ds = \mu y\,ds.$$

Les équations d'équilibre sont donc

$$d\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right) = 0, \qquad d\left(\mathrm{T}\frac{dy}{ds}\right) + \mu y\,ds = 0;$$

la première donne $\mathrm{T}\frac{dx}{ds} = \mathrm{A}$, où l'on peut toujours supposer A positif en comptant les arcs s dans un sens tel que x croisse avec s; en portant cette valeur de T dans la deuxième équation et posant

$$\frac{dy}{dx} = y', \qquad \frac{\mu}{\mathrm{A}} = \frac{2}{a^2}, \qquad ds = dx\sqrt{1+y'^2} = \frac{dy\sqrt{1+y'^2}}{y'},$$

on a l'équation

$$\frac{y'\,dy'}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{2y\,dy}{a^2} = 0,$$

et en intégrant

$$\sqrt{1+y'^2}+\frac{y^2}{a^2}=\frac{b^2}{a^2},$$

b^2 désignant une constante nécessairement positive puisque le premier membre est positif. Isolant le radical, élevant au carré et remettant pour y' sa valeur $\frac{dy}{dx}$, on a

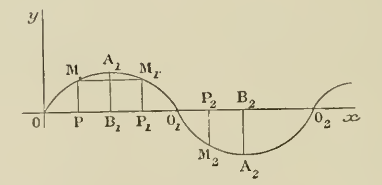
$$dx=\pm\frac{a^2\,dy}{\sqrt{(b^2-y^2)^2-a^4}}.$$

Comme le fil est attaché à l'axe Ox, l'équation doit donner une valeur réelle pour y' quand $y=0$, donc $b^2>a^2$. En désignant par $\varphi(y)$, le polynome bicarré placé sous le radical, on a

$$\varphi(y)=(b^2+a^2-y^2)(b^2-a^2-y^2);$$

y partant de zéro ne peut varier qu'entre $-\sqrt{b^2-a^2}$ et $+\sqrt{b^2-a^2}$. Construisons la courbe. Supposons que le fil soit attaché en O (*fig.* 15) et qu'il soit situé dans l'angle yOx : alors x croît

Fig. 15.



d'abord avec y, $\frac{dx}{dy}$ est positif, et l'on a

$$\text{(C)}\qquad x=\int_0^y\frac{a^2\,dy}{\sqrt{\varphi(y)}};$$

y croissant, x croît, jusqu'à ce que $y=\sqrt{b^2-a^2}$; x atteint alors la valeur

$$\xi=\int_0^{\sqrt{b^2-a^2}}\frac{a^2\,dy}{\sqrt{\varphi(y)}};$$

on a ainsi la branche OA_1; la tangente en A_1 est *horizontale*. A partir de cette valeur, y décroît et, pour que x continue à croître, il faut prendre le signe $-$ devant $\sqrt{\varphi(y)}$: on a ainsi une nouvelle branche $A_1M_1O_1$ symétrique de la première OMA_1 par rapport a

l'ordonnée $A_1 B_1$, car à des variations égales de y correspondent des variations égales de x. Pour $y = 0$ on obtient le point O_1 d'abscisse 2ξ; puis, y devenant négatif peut décroître jusqu'à la valeur $-\sqrt{b^2 - a^2}$, l'abscisse croît toujours jusqu'à la valeur 3ξ, ce qui donne le point A_2, où la tangente est horizontale. Ensuite y augmente de nouveau de $-\sqrt{b^2 - a^2}$ à $+\sqrt{b^2 - a^2}$; il faut prendre, à partir de A_2, le signe $+$ devant le radical, et l'on obtient l'arc $A_2 O_2 A_3$ coupant l'axe au point O_2 d'abscisse 4ξ, etc. Les branches de courbe ainsi obtenues successivement sont toutes égales à la première. La courbe est donc analogue à une *sinusoïde*.

Intégrons les équations par les fonctions elliptiques. Faisons dans l'équation (C) de la courbe

$$(1) \quad y = t\sqrt{b^2 - a^2}, \qquad k^2 = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} < 1, \qquad 1 - k^2 = k'^2 = \frac{2a^2}{b^2 + a^2};$$

elle prend la forme suivante :

$$\frac{x\sqrt{2}}{ak'} = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}};$$

d'où

$$t = \operatorname{sn} \frac{x\sqrt{2}}{ak'}, \qquad y = \sqrt{b^2 - a^2} \operatorname{sn} \frac{x\sqrt{2}}{ak'}.$$

Ainsi la courbe donne la représentation graphique de la variation de la fonction sn.

La différentielle ds de l'arc de courbe est

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \frac{(b^2 - y^2)\, dy}{\sqrt{\varphi(y)}};$$

en faisant dans cette formule la substitution (1) ci-dessus, on trouve pour l'abscisse ξ du point A_1 et la longueur λ de l'arc OA_1 les deux expressions

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \frac{ak'}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}} = \frac{ak'}{\sqrt{2}} \mathrm{K}, \\ \lambda &= \frac{a}{k'\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{(1 + k^2 - 2k^2 t^2)\, dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}, \end{aligned} \right.$$

car le point A_1 s'obtient en faisant $t = 1$.

Quand λ et ξ sont *donnés* (λ étant supérieur à ξ, car l'arc OA_1 est supérieur à sa projection OB_1), les constantes a et k^2 ont un seul système de valeurs, sous la condition $k^2 < 1$. En effet, en calculant $\lambda - \xi$ et $\lambda + \xi$, on trouve

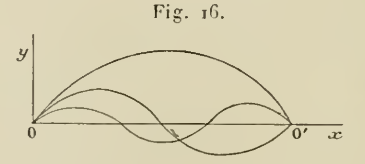
$$(3) \qquad \frac{\lambda - \xi}{\lambda + \xi} = k^2 \frac{\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1 - t^2}{1 - k^2 t^2}}\, dt}{\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2 t^2}{1 - t^2}}\, dt}.$$

Pour $k^2 = 0$, le rapport du second membre est nul; k^2 augmentant, le numérateur augmente évidemment et le dénominateur diminue, donc le rapport augmente et pour $k^2 = 1$ le rapport est 1. Ce rapport passe donc une fois et une seule fois par la valeur donnée $\frac{\lambda - \xi}{\lambda + \xi}$. La constante k^2 a donc une valeur et une seule; l'expression (2) de ξ donne alors pour a une seule valeur $\frac{\xi\sqrt{2}}{Kk'}$.

Détermination des constantes. — Le fil ayant une longueur donnée l et étant attaché au point O et au point O′ de l'axe Ox d'abscisse α, il y a une infinité de cas possibles.

1° Le fil n'a qu'une seule onde entre O et O′ (*fig.* 16). Alors ξ

Fig. 16.



est la moitié de α, λ la moitié de l. Les quantités ξ et λ étant connues, la constante k^2 a une seule valeur donnée par l'équation (3); puis $a = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2Kk'}$.

2° Le fil a deux ondes entre O et O′. Alors $\xi = \frac{\alpha}{4}$, $\lambda = \frac{l}{4}$; k^2 a la même valeur que dans le cas précédent, car $\frac{\lambda - \xi}{\lambda + \xi}$ est le même $\frac{l - \alpha}{l + \alpha}$; ensuite $a = \frac{\alpha\sqrt{2}}{4Kk'}$, ...

En général, si le fil a n ondes entre O et O′, $\xi = \frac{\alpha}{2n}$, $\lambda = \frac{l}{2n}$, k^2 a toujours la même valeur, mais $a = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2n\mathrm{K}k'}$.

Il y a donc une infinité de positions d'équilibre qui sont toutes homothétiques de la première par rapport à O, les rapports d'homothétie étant $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}$.

128. Mouvements à la Poinsot. — Étudions le mouvement d'un solide autour d'un point fixe O, dans le cas où les forces ont une résultante unique passant par le point O.

En prenant pour axes liés au corps les trois axes principaux d'inertie relatifs au point O, $Oxyz$, on a, pour déterminer les composantes p, q, r de la rotation instantanée suivant ces axes, les trois équations suivantes, dans lesquelles A, B, C sont les moments d'inertie principaux $(\mathrm{A} > \mathrm{B} > \mathrm{C})$, D et μ des constantes arbitraires [1],

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2 + \mathrm{C}r^2 = \mathrm{D}\mu^2, \\ \mathrm{A}^2p^2 + \mathrm{B}^2q^2 + \mathrm{C}^2r^2 = \mathrm{D}^2\mu^2, \\ \mathrm{B}\dfrac{dq}{dt} + (\mathrm{A}-\mathrm{C})pr = 0. \end{array}\right.$$

Nous tirerons p et r des deux premières équations et, en les portant dans la troisième, nous aurons une équation différentielle du premier ordre en q. L'élimination de r entre les deux premières équations donne

$$\mathrm{A}p^2(\mathrm{A}-\mathrm{C}) + \mathrm{B}q^2(\mathrm{B}-\mathrm{C}) = \mathrm{D}(\mathrm{D}-\mathrm{C})\mu^2.$$

D'après les grandeurs relatives de A, B, C, on voit que la différence $\mathrm{D}-\mathrm{C}$ est essentiellement positive : elle ne pourrait être nulle que si les valeurs initiales p_0 et q_0 de p et q étaient nulles.

De l'équation ci-dessus l'on tire

$$p^2 = \frac{\mathrm{B}(\mathrm{B}-\mathrm{C})}{\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{C})}(f^2 - q^2),$$

en posant

$$f^2 = \mu^2\frac{\mathrm{D}(\mathrm{D}-\mathrm{C})}{\mathrm{B}(\mathrm{B}-\mathrm{C})};$$

---

[1] *Voir* APPELL, *Traité de Mécanique*, t. II, p. 199.

on aurait par un calcul semblable

$$(2)\qquad r^2 = \frac{B(A-B)}{C(A-C)}(g^2-q^2), \qquad g^2 = \mu^2\frac{D(A-D)}{B(A-B)},$$

le binome A — D étant essentiellement positif et ne pouvant être nul que si q_0 et r_0 sont nuls.

Pour que p et r restent réels, il faut que q^2 reste inférieur à la plus petite des deux quantités f^2 et g^2; pour reconnaître cette quantité, formons la différence $g^2 - f^2$:

$$g^2 - f^2 = \mu^2\frac{D(A-C)(B-D)}{B(B-C)(A-B)}.$$

Le signe de $g^2 - f^2$ est donc celui de $B - D$, signe connu par les conditions initiales.

Pour fixer les idées, nous supposerons

$$B - D > 0, \qquad g^2 > f^2.$$

La variable q doit alors varier entre $-f$ et $+f$: donc r ne s'annule jamais et conserve toujours le même signe, signe connu par la valeur initiale r_0 : nous supposerons $r > 0$. Au contraire, p s'annule toutes les fois que $q = \pm f$; quand q augmente, $\frac{dq}{dt}$ est positif, la troisième des équations (1) montre que p est alors négatif; quand q diminue, p est positif. Ces considérations fixent à chaque instant les signes à prendre devant les radicaux qui donnent p et r en fonction de q.

En portant ces valeurs de p et r dans la troisième des équations (1), on trouve

$$\frac{dq}{dt} = \sqrt{\frac{(B-C)(A-B)}{AC}}\sqrt{(f^2-q^2)(g^2-q^2)},$$

où le radical est pris positivement tant que q augmente, jusqu'au moment où q atteint la valeur $+f$; puis, q décroissant de $+f$ à $-f$, le radical doit être pris négativement, et ainsi de suite.

On voit que t est donné en fonction de q par une intégrale que nous ramènerons à la forme considérée dans le Chapitre précédent, en posant

$$q = fs, \qquad k^2 = \frac{f^2}{g^2} = \frac{(A-B)(D-C)}{(B-C)(A-D)}.$$

Nous aurons ainsi, en résolvant par rapport à dt et intégrant,

$$n(t-t_0)=\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}},$$

où n désigne la constante positive

$$n=\mu\sqrt{\frac{D(A-D)(B-C)}{ABC}}$$

et t_0 une nouvelle constante arbitraire, représentant l'époque où q s'annule en croissant. Le module k^2 est moindre que 1 puisque $g^2>f^2$; il est égal au rapport anharmonique de A, B, D, C.

Ces formules donnent p, q, r en fonctions uniformes du temps. En effet, en posant, pour abréger,

$$\tau=n(t-t_0),$$

l'inversion de l'intégrale elliptique donne

$$s=\operatorname{sn}\tau;$$

$$(5)\quad \begin{cases} q=fs & =\mu\sqrt{\dfrac{D(D-C)}{B(B-C)}}\operatorname{sn}\tau,\\[2ex] p=f\sqrt{\dfrac{B(B-C)}{A(A-C)}}\sqrt{1-\operatorname{sn}^2\tau} & =\varepsilon'\mu\sqrt{\dfrac{D(D-C)}{A(A-C)}}\operatorname{cn}\tau,\\[2ex] r=g\sqrt{\dfrac{B(A-B)}{C(A-C)}}\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2\tau} & =\varepsilon''\mu\sqrt{\dfrac{D(A-D)}{C(A-C)}}\operatorname{dn}\tau. \end{cases}$$

où μ est positif et où ε', ε'' sont égaux à ± 1.

D'après les propriétés des fonctions sn, cn, dn, ces formules montrent que p et q s'annulent périodiquement, tandis que r ne s'annule jamais.

Si nous supposons $r_0>0$, r reste constamment positif et il faut prendre $\varepsilon''=+1$. Alors, d'après la troisième équation (1), on voit immédiatement que $\dfrac{dq}{dt}$ et p doivent être de signes contraires, ce qui, d'après la formule

$$\frac{d\operatorname{sn}\tau}{d\tau}=\operatorname{cn}\tau\operatorname{dn}\tau,$$

montre que $\varepsilon'=-1$.

Les valeurs de p, q, r sont des fonctions périodiques de t et

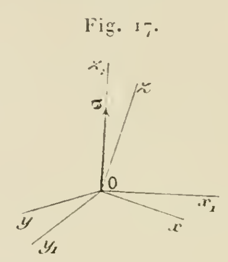
admettent la période

$$T = \frac{4K}{n} = \frac{4}{n}\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}.$$

Quand le temps augmente de cette quantité, p, q, r reprennent les mêmes valeurs; l'axe instantané de rotation reprend alors sa position primitive dans le corps, mais non dans l'espace, comme nous le verrons plus loin.

Il faut maintenant calculer les trois angles d'Euler en fonction du temps. Pour simplifier le calcul, nous supposerons qu'on ait

Fig. 17.



pris pour axe des z_1 la direction invariable de l'axe $O\sigma$ du moment résultant des quantités de mouvement. Écrivons que les projections du segment $O\sigma = l$ sur les axes mobiles sont respectivement Ap, Bq, Cr, nous aurons

$$(4)\qquad \begin{cases} l\sin\theta\,\sin\varphi = Ap, \\ l\sin\theta\,\cos\varphi = Bq, \\ l\cos\theta = Cr; \end{cases}$$

car les cosinus γ, γ', γ'' des angles de Ox, Oy, Oz avec Oz_1 sont $\sin\theta\sin\varphi$, $\sin\theta\cos\varphi$ et $\cos\theta$. Ces équations donnent, sans intégration, θ et φ en fonction de p, q, r et, par suite, en fonction de t.

Calcul de l'angle de précession ψ. — On a, d'après les équations du mouvement,

$$\frac{d\psi}{dt} = \mu D \frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2p^2 + B^2q^2}.$$

Remplaçons, dans cette expression, p et q par leurs valeurs (3)

et $\text{cn}^2\tau$ par $1-\text{sn}^2\tau$; nous avons

$$\frac{d\psi}{d\tau}=\frac{\mu D}{n}\,\frac{(B-C)-(B-A)\,\text{sn}^2\tau}{A(B-C)-C(B-A)\,\text{sn}^2\tau},$$

ce qu'on peut encore écrire, en effectuant la division,

$$\frac{d\psi}{d\tau}=\frac{\mu D}{nC}+\frac{\mu D}{nC}\,\frac{(C-A)(B-C)}{A(B-C)-C(B-A)\,\text{sn}^2\tau}.$$

Pour mettre en évidence les pôles de la fonction doublement périodique du second membre, déterminons un argument constant ic vérifiant la relation

(5) $$\text{sn}^2 ic=\frac{A(B-C)}{C(B-A)};$$

comme $A>B$, la valeur de sn ic est purement imaginaire : on peut donc prendre, pour l'argument ic, une valeur purement imaginaire, et, par suite, pour c, une valeur réelle. Nous pourrons alors écrire

$$\frac{d\psi}{d\tau}=\frac{\mu D}{nC}+\frac{\mu D}{nC}\,\frac{(C-A)(B-C)}{C(B-A)}\,\frac{1}{\text{sn}^2 ic-\text{sn}^2\tau}.$$

D'après les relations élémentaires qui lient les fonctions sn, cn, dn d'un même argument, on tire de (5)

$$\text{cn}^2 ic=\frac{B(A-C)}{C(A-B)},\qquad \text{dn}^2 ic=\frac{D(A-C)}{C(A-D)}.$$

Extrayant les racines carrées et tenant compte de la valeur de n, on trouve

$$i\,\text{sn}\,ic\,\text{cn}\,ic\,\text{dn}\,ic=\frac{\mu D}{nC}\,\frac{(C-A)(B-C)}{C(B-A)}.$$

Il faudrait mettre un double signe devant le deuxième membre, mais, comme on peut changer le signe de ic sans que les relations antérieures soient changées, on peut toujours prendre le signe + devant le second membre. L'équation qui donne $\frac{d\psi}{d\tau}$ s'écrit alors

(6) $$\frac{d\psi}{d\tau}=\frac{\mu D}{nC}+\frac{i\,\text{sn}\,ic\,\text{cn}\,ic\,\text{dn}\,ic}{\text{sn}^2 ic-\text{sn}^2\tau}.$$

Cette expression est maintenant aisée à intégrer : il suffit pour cela de décomposer le second membre en éléments simples. Or,

nous avons établi, dans le n° 100, la formule

$$\frac{2\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 a} = Z(u-a) - Z(u+a) + 2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}.$$

On a donc, en faisant $a = ic$, $u = \tau$, et désignant par λ la constante réelle $\frac{\mu D}{nC} - i\frac{\Theta'(ic)}{\Theta(ic)}$,

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \lambda + \frac{i}{2}\frac{H'(ic-\tau)}{H(ic-\tau)} + \frac{i}{2}\frac{H'(ic+\tau)}{H(ic+\tau)}.$$

Intégrant et supposant les axes choisis de telle façon que ψ s'annule avec τ, on a enfin

(7) $$\psi = \lambda\tau + \frac{i}{2}\log\frac{H(ic+\tau)}{H(ic-\tau)}.$$

Les trois angles θ, φ, ψ sont ainsi exprimés en fonction du temps, et l'on peut déterminer la position du corps à un instant quelconque. Les sinus et cosinus de ces trois angles s'expriment par des fonctions du temps qui sont ou uniformes ou racines carrées de fonctions uniformes. Mais il est très remarquable, comme l'a montré Jacobi, que les neuf cosinus α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' sont des fonctions uniformes du temps. Ce résultat peut s'établir comme il suit. Les formules (4) donnent déjà γ, γ', γ'' en fonction uniforme de t. On en conclut

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2}}{D\mu},$$

ou, en remplaçant p^2 et q^2 par leurs valeurs,

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{C(A-B)(D-C)}{D(A-C)(B-C)}}\sqrt{\operatorname{sn}^2\tau - \frac{A(B-C)}{C(B-A)}}.$$

D'après l'expression du module k^2 et les formules définissant $\operatorname{sn}^2 ic$, $\operatorname{cn}^2 ic$, $\operatorname{dn}^2 ic$, on peut écrire

$$\sin\theta = \frac{k}{\operatorname{dn} ic}\sqrt{\operatorname{sn}^2\tau - \operatorname{sn}^2 ic}.$$

Mais on a obtenu la formule (n° 100)

$$\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u = \frac{\Theta^2(0)}{k}\frac{H(a-u)H(a+u)}{\Theta^2(a)\Theta^2(u)};$$

en y remplaçant a par τ et u par ic, et remarquant que, par définition, $\operatorname{dn} ic = \frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)} \frac{\Theta_1(ic)}{\Theta(ic)}$ et $\sqrt{k} = \frac{H_1(0)}{\Theta_1(0)}$, on trouve

$$\sin\theta = \frac{H_1(0)}{\Theta_1(ic)\Theta(\tau)} \sqrt{H(\tau - ic)H(\tau + ic)}. \tag{8}$$

D'autre part, l'expression (7) donne

$$e^{i\psi} = ie^{i\lambda\tau}\sqrt{\frac{H(\tau + ic)}{H(\tau - ic)}};$$

donc

$$e^{i\psi}\sin\theta = \frac{iH_1(0)}{\Theta_1(ic)} \frac{H(\tau - ic)}{\Theta(\tau)} e^{i\lambda\tau},$$

$$e^{-i\psi}\sin\theta = -\frac{iH_1(0)}{\Theta_1(ic)} \frac{H(\tau + ic)}{\Theta(\tau)} e^{-i\lambda\tau}.$$

A l'aide de ces expressions on forme facilement les valeurs des cosinus α, α', α'', β, β', β'', en fonctions du temps. Il suffit de partir des formules donnant ces cosinus en fonction des angles d'Euler et d'y remplacer ensuite les angles d'Euler par leurs valeurs en fonction de τ.

Nous trouverons plus loin ces mêmes cosinus par une autre voie.

Cas de dégénérescence. — La valeur du module est donnée par

$$k^2 = \frac{(A - B)(D - C)}{(B - C)(A - D)}.$$

Ce module est *nul* quand $A = B$, c'est-à-dire quand l'ellipsoïde d'inertie est de révolution. Les fonctions elliptiques deviennent alors des fonctions circulaires.

Le module est égal à l'*unité* quand $D = B$: dans ce cas les angles θ, φ, ψ et les neuf cosinus s'expriment comme il suit : la fonction $s = \operatorname{sn}\tau$ devient $\frac{e^\tau - e^{-\tau}}{e^\tau + e^{-\tau}}$ ou $-i \operatorname{tang} i\tau$, et les fonctions $\operatorname{cn}\tau$ et $\operatorname{dn}\tau$ se réduisent à $\sqrt{1 - s^2}$ ou à $\frac{1}{\cos i\tau}$. En introduisant un argument purement imaginaire ic défini par la relation (5), c'est-à-dire

$$\operatorname{tang}^2 c = \frac{A(B - C)}{C(A - B)}, \qquad \frac{1}{\cos^2 c} = \frac{B(A - C)}{C(A - B)},$$

on remplacera la formule (6) par

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{\mu B}{nC} + \frac{\operatorname{tang} c}{\cos^2 c} \frac{1}{\operatorname{tang}^2 c - \operatorname{tang}^2 i\tau},$$

qui donne, en intégrant et désignant par λ la constante $\frac{\mu B}{nC} + \operatorname{tang} c$,

$$\psi = \lambda\tau - \frac{i}{2} \operatorname{Log} \frac{\sin(c + i\tau)}{\sin(c - i\tau)}.$$

On déduit de là les expressions des neuf cosinus.

129. **Herpolhodie.** — Dans la représentation du mouvement, d'après Poinsot, la *polhodie* est une courbe algébrique; cherchons les équations de l'*herpolhodie* ou lieu du pôle m sur le plan fixe (¹).

En appelant x, y, z les coordonnées du pôle m par rapport aux axes principaux d'inertie $Oxyz$, on a, puisque le rapport $\frac{\omega}{Om}$ est constant et égal à $\sqrt{h}$ ou $\mu\sqrt{D}$,

$$(9) \qquad \frac{p}{x} = \frac{q}{y} = \frac{r}{z} = \frac{\omega}{Om} = \mu\sqrt{D}.$$

Comme p, q, r sont des fonctions elliptiques de t, il en est de même de x, y, z. Les équations d'Euler, dans lesquelles on remplace p, q, r par $x\mu\sqrt{D}$, $y\mu\sqrt{D}$, $z\mu\sqrt{D}$, donnent

$$(10) \qquad A\frac{dx}{dt} + \mu\sqrt{D}(C - B)yz = 0, \quad B\frac{dy}{dt} + \mu\sqrt{D}(A - C)zx = 0, \quad \ldots.$$

Appelons P la projection du point O sur le plan fixe II, qui contient l'herpolhodie, et désignons par ρ et χ les coordonnées polaires d'un point m de la courbe rapportée au point P. Comme

$$OP = \frac{1}{\sqrt{D}},$$

on a les équations suivantes

$$(11) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 + \dfrac{1}{D}, \\ A\ x^2 + B\ y^2 + C\ z^2 = 1, \\ A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = D, \end{cases}$$

(¹) *Voir* APPELL, *Mécanique*, t. II, p. 212 et suivantes.

dont la première exprime que $\overline{Om}^2 = \overline{Pm}^2 + \overline{OP}^2$, et dont les dernières sont les équations de la polhodie. Résolvant ces équations par rapport à x^2, y^2, z^2, on a, en posant

$$\Delta = (A-B)(B-C)(C-A)$$

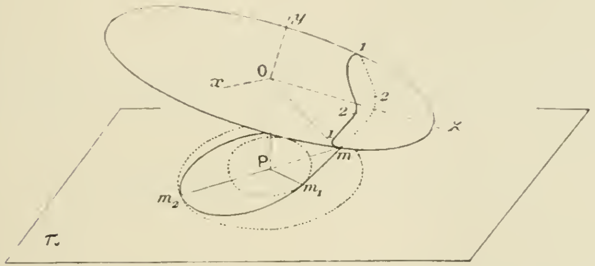
et

$$a = -\frac{(B-D)(C-D)}{BCD}, \qquad b = -\frac{(C-D)(A-D)}{CAD},$$

$$c = -\frac{(A-D)(B-D)}{ABD},$$

$$(12) \quad \begin{cases} x^2 = \dfrac{BC(C-B)}{\Delta}(\rho^2 - a), \qquad y^2 = \dfrac{CA(A-C)}{\Delta}(\rho^2 - b), \\ z^2 = \dfrac{AB(B-A)}{\Delta}(\rho^2 - c). \end{cases}$$

Fig. 18.



Nous avons supposé $A > B > C$ et D compris entre B et C; alors Δ est négatif, et l'on a $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$. Donc z^2 est essentiellement positif et ne s'annule jamais, ce qui est d'accord avec le fait que r ne s'annule jamais. Pour que x^2 et y^2 soient positifs, il faut que $\rho^2 - a$ soit positif et $\rho^2 - b$ négatif : ρ^2 oscille donc entre a et b. Ainsi le rayon vecteur de l'herpolhodie oscille entre un minimum $\sqrt{a}$ et un maximum $\sqrt{b}$. En différentiant la première des équations (11), on a

$$\rho \frac{d\rho}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt},$$

ou, en tenant compte des équations (10),

$$\rho\frac{d\rho}{dt} = \mu\sqrt{D}\,xyz\left(\frac{B-C}{A} + \frac{C-A}{B} + \frac{A-B}{C}\right) = -\frac{\mu\Delta\sqrt{D}\,xyz}{ABC};$$

cette équation donne enfin, en remplaçant x, y, z par leurs valeurs (12),

$$(13)\qquad \rho\frac{d\rho}{dt} = \mu\sqrt{\mathrm{D}}\sqrt{-(\rho^2-a)(\rho^2-b)(\rho^2-c)},$$

équation qui permettrait de retrouver ρ^2 en fonction de t par une fonction elliptique; cette expression de ρ^2 en fonction de t nous est déjà connue, puisque x, y, z sont des fonctions elliptiques de t.

En appelant χ l'angle polaire que fait le rayon $\mathrm{P}m$ de l'herpolhodie avec une direction fixe, on obtient ensuite l'équation

$$(14)\qquad \rho^2\frac{d\chi}{dt} = \mu(\rho^2+\mathrm{E}),$$

où E désigne la constante $\frac{(\mathrm{A}-\mathrm{D})(\mathrm{B}-\mathrm{D})(\mathrm{C}-\mathrm{D})}{\mathrm{ABCD}}$, c'est-à-dire $-\sqrt{-abc\mathrm{D}}$.

Les deux relations (13) et (14) donnent ρ et χ en fonction du temps. L'élimination de dt fournit l'équation différentielle de l'herpolhodie

$$(15)\qquad d\chi = \frac{(\rho^2+\mathrm{E})\,d\rho}{\rho\sqrt{\mathrm{D}}\sqrt{-(\rho^2-a)(\rho^2-b)(\rho^2-c)}},$$

qui donne χ par une quadrature.

Ceci posé, nous allons vérifier que

$$\rho e^{i\chi} = \rho\cos\chi + i\rho\sin\chi,$$

s'exprime en fonction uniforme du temps. On a d'abord immédiatement ρ^2 en remplaçant, dans l'équation (12),

$$y^2 = \frac{\mathrm{CA}(\mathrm{A}-\mathrm{C})}{\Delta}(\rho^2-b),$$

y^2 par sa valeur en fonction du temps

$$y^2 = \frac{q^2}{\mu^2\mathrm{D}} = \frac{\mathrm{D}-\mathrm{C}}{\mathrm{B}(\mathrm{B}-\mathrm{C})}\,\mathrm{sn}^2\tau.$$

On trouve ainsi

$$\rho^2 = \frac{(\mathrm{D}-\mathrm{C})(\mathrm{A}-\mathrm{D})}{\mathrm{CAD}} - \frac{(\mathrm{A}-\mathrm{B})(\mathrm{D}-\mathrm{C})}{\mathrm{ABC}}\,\mathrm{sn}^2\tau,$$

ou bien

$$\rho^2 = -\frac{(A-B)(D-C)}{ABC}(\operatorname{sn}^2\tau - \operatorname{sn}^2 v),$$

en posant

$$\operatorname{sn}^2 v = \frac{(A-D)B}{(A-B)D}.$$

Les relations

$$\operatorname{cn}^2 v = 1 - \operatorname{sn}^2 v, \qquad \operatorname{dn}^2 v = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v, \qquad k^2 = \frac{(A-B)(D-C)}{(B-C)(A-D)}$$

donnent $\operatorname{cn} v$ et $\operatorname{dn} v$. Rapprochons les trois résultats suivants

$$\operatorname{sn}^2 v = \frac{B(A-D)}{D(A-B)}, \qquad \operatorname{cn}^2 v = -\frac{A(B-D)}{D(A-B)}, \qquad \operatorname{dn}^2 v = \frac{C(B-D)}{D(B-C)}.$$

Pour obtenir χ nous partirons de l'égalité (14) qui donne

$$\frac{d\chi}{dt} = \mu + \frac{\mu E}{\rho^2},$$

et, en remplaçant ρ^2 par sa valeur en fonction de τ et dt par $\frac{1}{n}d\tau$

$$\frac{d\chi}{d\tau} = \frac{\mu}{n} + \frac{\mu}{n} \times \frac{(A-D)(B-D)}{D(A-B)} \frac{1}{\operatorname{sn}^2\tau - \operatorname{sn}^2 v}.$$

Décomposons le second membre en éléments simples en nous servant de la formule

$$\frac{2 \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{\operatorname{sn}^2 v - \operatorname{sn}^2\tau} = -2\frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)} + \frac{H'(v-\tau)}{H(v-\tau)} + \frac{H'(v+\tau)}{H(v+\tau)}.$$

Nous déduirons d'abord des valeurs de $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$ et n la relation

$$\operatorname{sn}^2 v \operatorname{cn}^2 v \operatorname{dn}^2 v = -\frac{\mu^2}{n^2}\left[\frac{(A-D)(B-D)}{D(A-B)}\right]^2,$$

et nous pourrons ensuite écrire

$$\frac{d\chi}{d\tau} = \frac{\mu}{n} + \frac{1}{i}\frac{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{\operatorname{sn}^2\tau - \operatorname{sn}^2 v},$$

puis

$$2i\frac{d\chi}{d\tau} = 2i\frac{\mu}{n} + 2\frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)} + \frac{H'(\tau-v)}{H(\tau-v)} - \frac{H'(\tau+v)}{H(\tau+v)}.$$

On déduit de là

$$e^{2i\chi} = e^{2\tau\left[\frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)} + \frac{i\mu}{n}\right] + 2i\nu}\,\frac{\mathrm{H}(\tau - v)}{\mathrm{H}(\tau + v)},$$

ν désignant une constante arbitraire.

D'autre part, on a

$$\rho^2 = -\frac{(\mathrm{A}-\mathrm{B})(\mathrm{D}-\mathrm{C})}{\mathrm{ABC}}(\mathrm{sn}^2\tau - \mathrm{sn}^2 v),$$

ou, d'après une formule déjà rappelée,

$$\rho^2 = -\frac{(\mathrm{A}-\mathrm{B})(\mathrm{D}-\mathrm{C})}{\mathrm{ABC}}\,\frac{\Theta^2(0)}{k}\,\frac{\mathrm{H}(\tau - v)\,\mathrm{H}(\tau + v)}{\Theta^2(v)\,\Theta^2(\tau)}.$$

On voit alors que $\rho^2 e^{2i\chi}$ est le carré d'une fonction uniforme et l'on obtient

$$\rho e^{i\chi} = \mathrm{N} e^{\tau\left[\frac{i\mu}{n} + \frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)}\right] + i\nu}\,\frac{\mathrm{H}(\tau - v)}{\Theta(\tau)},$$

en posant

$$\mathrm{N}^2 = -\frac{(\mathrm{A}-\mathrm{B})(\mathrm{D}-\mathrm{C})}{\mathrm{ABC}}\,\frac{\Theta^2(0)}{k\,\Theta^2(v)} = -\frac{k^2 n^2}{\mathrm{D}\mu^2}\,\frac{\Theta^2(0)}{k\,\Theta^2(v)};$$

la quantité $\sqrt{k}\,\Theta(0)$ est égale à $\mathrm{H}'(0)$, comme il résulte de ce que la limite de $\frac{\mathrm{sn}\,u}{u}$ est 1 pour $u = 0$: on a donc

$$\mathrm{N} = \frac{in}{\mu\sqrt{\mathrm{D}}}\,\frac{\mathrm{H}'(0)}{\Theta(v)},$$

de sorte que, en définitive, l'herpolhodie est définie par l'équation

$$\rho e^{i\chi} = \frac{in}{\mu\sqrt{\mathrm{D}}}\,\frac{\mathrm{H}'(0)}{\Theta(v)}\,\frac{\mathrm{H}(\tau - v)}{\Theta(\tau)}\,e^{\tau\left[\frac{i\mu}{n} + \frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)}\right] + i\nu}.$$

En se reportant aux valeurs de $\mathrm{sn}^2 v$, $\mathrm{cn}^2 v$, $\mathrm{dn}^2 v$ en fonction des données, on voit que l'on a

$$1 < \mathrm{sn}^2 v < \frac{1}{k^2}.$$

D'après cela $v - \mathrm{K}$ est purement imaginaire. Cette remarque nous conduit à poser

$$v - \mathrm{K} = a,$$

et à remplacer v par cette valeur dans l'équation de l'herpolhodie. Cette équation devient

$$\rho e^{i\chi} = \frac{in}{\mu\sqrt{D}} \frac{H'(o)}{\Theta_1(a)} \frac{H_1(\tau - a)}{\Theta(\tau)} e^{i(\lambda\tau+\nu)},$$

$$i\lambda = \frac{i\mu}{n} + \frac{\Theta_1'(a)}{\Theta_1(a)}, \qquad \tau = n(t - t_0).$$

a est purement imaginaire et λ est réel, ν est une constante arbitraire réelle.

130. Vitesses de rotation autour des axes fixes. — Un point m de l'herpolhoïde et l'extrémité ω de la rotation instantanée sont en ligne droite avec le point fixe O et l'on a vu qu'on a

$$\omega = \mathrm{O}m\sqrt{h}, \qquad \text{où} \qquad \sqrt{h} = \mu\sqrt{D},$$

Si donc, on appelle p_1 et q_1 les projections de la vitesse angulaire sur les axes fixes $\mathrm{O}x_1$, $\mathrm{O}y_1$, on aura

$$p_1 + iq_1 = \mu\sqrt{D}\,\rho e^{i\chi},$$

ou bien

$$p_1 + iq_1 = -in\frac{H'(o)}{\Theta_1(a)} \frac{H_1(\tau - a)}{\Theta(\tau)} e^{i(\lambda\tau+\nu)}.$$

C'est à un changement de notation près la formule donnée par M. Hermite (*Sur quelques applications des fonctions elliptiques*, p. 35). L'argument ω qui figure dans la formule de M. Hermite et l'argument a employé ici sont liés par la relation

$$a = \omega + i\mathrm{K}'.$$

131. Les neuf cosinus déduits de l'équation de l'herpolhodie. — Comme on l'a déjà remarqué (n° 128), $\mathrm{A}p$, $\mathrm{B}q$, $\mathrm{C}r$ sont les projections du segment $\mathrm{O}\sigma = l = \mathrm{D}\mu$ sur les axes mobiles. On a donc

$$\frac{\mathrm{A}p}{\gamma} = \frac{\mathrm{B}q}{\gamma'} = \frac{\mathrm{C}r}{\gamma''} = \mathrm{D}\mu,$$

d'où

$$\gamma = \mathrm{P}\,\mathrm{cn}\,\tau, \qquad \mathrm{P} = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{A}(\mathrm{D}-\mathrm{C})}{\mathrm{D}(\mathrm{A}-\mathrm{C})}},$$

$$\gamma' = \mathrm{Q}\,\mathrm{sn}\,\tau, \qquad \mathrm{Q} = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{B}(\mathrm{D}-\mathrm{C})}{\mathrm{D}(\mathrm{B}-\mathrm{C})}},$$

$$\gamma'' = \mathrm{R}\,\mathrm{dn}\,\tau, \qquad \mathrm{R} = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{C}(\mathrm{A}-\mathrm{D})}{\mathrm{D}(\mathrm{A}-\mathrm{C})}}.$$

Nous allons d'abord exprimer P, Q et R en fonction de l'argument v qui figure dans l'équation de l'herpolhodie. On a

$$Q^2 = \frac{B(A-D)}{D(A-B)} \times \frac{(A-B)(D-C)}{(B-C)(A-D)} = k^2 \operatorname{sn}^2 v,$$

puis l'identité

$$P^2 \operatorname{cn}^2 \tau + Q^2 \operatorname{sn}^2 \tau + R^2 \operatorname{dn}^2 \tau = 1,$$

où l'on fait successivement $\operatorname{cn}^2 \tau = 0$ et $\operatorname{dn}^2 \tau = 0$, fait connaître R et P; on trouve ainsi

$$\gamma = -\frac{ik}{k'} \operatorname{cn} v \operatorname{cn} \tau, \qquad \gamma' = k \operatorname{sn} v \operatorname{sn} \tau, \qquad \gamma'' = -\frac{\operatorname{dn} v}{k'} \operatorname{dn} \tau,$$

ou bien

$$\gamma = -i \frac{H_1(v) H_1(\tau)}{\Theta(v)\Theta(\tau)}, \qquad \gamma' = \frac{H(v) H(\tau)}{\Theta(v)\Theta(\tau)}, \qquad \gamma'' = -\frac{\Theta_1(v)\Theta_1(\tau)}{\Theta(v)\Theta(\tau)},$$

et, en posant

$$v - K = a,$$

de sorte que (n° 129) a est purement imaginaire

$$\gamma = i \frac{H(a) H_1(\tau)}{\Theta_1(a)\Theta(\tau)}, \qquad \gamma' = \frac{H_1(a) H(\tau)}{\Theta_1(a)\Theta(\tau)}, \qquad \gamma'' = -\frac{\Theta(a)\Theta_1(\tau)}{\Theta_1(a)\Theta(\tau)}.$$

Pour calculer les autres cosinus nous prendrons comme inconnues

$$\alpha + i\beta, \qquad \alpha' + i\beta', \qquad \alpha'' + i\beta''.$$

Entre ces inconnues, on a les équations linéaires

$$\begin{gathered}
(\alpha + i\beta)\gamma + (\alpha' + i\beta')\gamma' + (\alpha'' + i\beta'')\gamma'' = 0, \\
\gamma'(\alpha'' + i\beta'') - \gamma''(\alpha' + i\beta') = -i(\alpha + i\beta), \\
(\alpha + i\beta)p + (\alpha' + i\beta')q + (\alpha'' + i\beta'')r = p_1 + iq_1;
\end{gathered}$$

des deux premières, on déduit

$$\alpha' + i\beta' = (\alpha + i\beta)\frac{\gamma\gamma' - i\gamma''}{\gamma^2 - 1},$$

$$\alpha'' + i\beta'' = (\alpha + i\beta)\frac{\gamma\gamma'' + i\gamma'}{\gamma^2 - 1}$$

et, en portant ces valeurs dans la dernière équation,

$$(\alpha + i\beta)\left(p + q\frac{\gamma\gamma' - i\gamma''}{\gamma^2 - 1} + r\frac{\gamma\gamma'' + i\gamma'}{\gamma^2 - 1}\right) = p_1 + iq_1.$$

Si l'on tient compte des égalités

$$\mathrm{A}p = l\gamma, \qquad \mathrm{B}q = l\gamma', \qquad \mathrm{C}r = l\gamma'',$$
$$\gamma p + \gamma' q + \gamma'' r = \mu = \frac{l}{\mathrm{D}},$$

on peut écrire cette équation

$$(\alpha - i\beta)\left[\frac{\gamma\, l\left(\frac{1}{\mathrm{D}} - \frac{1}{\mathrm{A}}\right) - i\gamma'\gamma''\, l\left(\frac{1}{\mathrm{C}} - \frac{1}{\mathrm{B}}\right)}{\gamma^2 - 1}\right] = p_1 - iq_1.$$

Il reste à exprimer en fonction de a les quantités

$$l\left(\frac{1}{\mathrm{D}} - \frac{1}{\mathrm{A}}\right), \quad l\left(\frac{1}{\mathrm{C}} - \frac{1}{\mathrm{B}}\right);$$

on peut le faire en se servant des relations suivantes

$$\sqrt{\left(\frac{1}{\mathrm{D}} - \frac{1}{\mathrm{A}}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{C}} - \frac{1}{\mathrm{B}}\right)} = \frac{n}{l},$$

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{\mathrm{D}} - \frac{1}{\mathrm{A}}}}{\sqrt{\frac{1}{\mathrm{C}} - \frac{1}{\mathrm{B}}}} = -\frac{\mathrm{QR}}{\mathrm{P}} = -i\frac{\operatorname{sn} v \operatorname{dn} v}{\operatorname{cn} v}$$
$$= -i\frac{\mathrm{H}(v)\Theta_1(v)}{\mathrm{H}_1(v)\Theta(v)} = -i\frac{\mathrm{H}_1(a)\Theta(a)}{\mathrm{H}(a)\Theta_1(a)};$$

on a ainsi

$$l\left(\frac{1}{\mathrm{D}} - \frac{1}{\mathrm{A}}\right) = -in\frac{\mathrm{H}_1(a)\Theta(a)}{\mathrm{H}(a)\Theta_1(a)},$$
$$l\left(\frac{1}{\mathrm{C}} - \frac{1}{\mathrm{B}}\right) = in\frac{\mathrm{H}(a)\Theta_1(a)}{\mathrm{H}_1(a)\Theta(a)}.$$

$$\frac{\gamma\, l\left(\frac{1}{\mathrm{D}} - \frac{1}{\mathrm{A}}\right) + i\gamma'\gamma''\, l\left(\frac{1}{\mathrm{C}} - \frac{1}{\mathrm{B}}\right)}{\gamma^2 - 1}$$
$$= -n\frac{\mathrm{H}_1(a)\Theta(a)\mathrm{H}_1(\tau)\Theta(\tau) + \mathrm{H}(a)\Theta_1(a)\mathrm{H}(\tau)\Theta_1(\tau)}{\Theta_1^2(a)\Theta^2(\tau) - \mathrm{H}^2(a)\mathrm{H}_1^2(\tau)}.$$

Si l'on divise les deux termes de cette fraction par $\Theta^2(a)\Theta^2(\tau)$ et si l'on y introduit les fonctions sn, cn, dn, elle devient, à un facteur constant près, égale à $\operatorname{cn}(\tau - a)$: sa valeur exacte est

$$n\frac{\Theta(0)\mathrm{H}_1(0)\mathrm{H}_1(\tau - a)}{\Theta_1^2(0)\Theta(\tau - a)},$$

et l'égalité qui définit $\alpha + i\beta$ peut s'écrire

$$-n(\alpha + i\beta)\frac{\Theta(0)\,H_1(0)\,H_1(\tau - a)}{\Theta_1^2(0)\,\Theta(\tau - a)} = p_1 + iq_1 = -in\,\frac{H'(0)}{\Theta_1(a)}\,\frac{H_1(\tau - a)}{\Theta(\tau)}\,e^{i(\lambda\tau+\nu)}.$$

En supprimant les facteurs communs, et remarquant que $\frac{H'(0)}{\Theta(0)}$ et $\frac{H_1(0)}{\Theta_1(0)}$ sont deux quantités égales à $\sqrt{k}$, on a enfin

$$\alpha + i\beta = i\,\frac{\Theta_1(0)\,\Theta(\tau - a)}{\Theta_1(a)\,\Theta(\tau)}\,e^{i(\lambda\tau+\nu)},$$

et l'on en déduit $\alpha' + i\beta'$, $\alpha'' + i\beta''$.

Réunissons les valeurs des neuf cosinus

$$\gamma = i\,\frac{H(a)\,H_1(\tau)}{\Theta_1(a)\,\Theta(\tau)}, \qquad \alpha + i\beta = i\,\frac{\Theta_1(0)\,\Theta(\tau - a)}{\Theta_1(a)\,\Theta(\tau)}\,e^{i(\lambda\tau+\nu)},$$

$$\gamma' = \frac{H_1(a)\,H(\tau)}{\Theta_1(a)\,\Theta(\tau)}, \qquad \alpha' + i\beta' = \frac{\Theta(0)\,\Theta_1(\tau - a)}{\Theta_1(a)\,\Theta(\tau)}\,e^{i(\lambda\tau+\nu)},$$

$$\gamma'' = -\frac{\Theta(a)\,\Theta_1(\tau)}{\Theta_1(a)\,\Theta(\tau)}, \qquad \alpha'' + i\beta'' = \frac{H_1(0)\,H(\tau - a)}{\Theta_1(a)\,\Theta(\tau)}\,e^{i(\lambda\tau+\nu)}.$$

EXERCICES SUR LE CHAPITRE V.

1. Lignes géodésiques de la *caténoïde* (surface engendrée par la révolution d'une chaînette autour de sa base).

L'axe de révolution étant pris pour axe Oz et r désignant le rayon d'un parallèle on a, pour l'équation de la surface,

$$r = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right).$$

On trouve que la projection des lignes géodésiques sur le plan des xy a pour équation en coordonnées polaires

$$\theta = \int_r^\infty \frac{b\,dr}{\sqrt{(r^2 - a^2)(r^2 - b^2)}},$$

b désignant une constante arbitraire et l'angle θ étant compté à partir de la direction asymptotique.

1° Soit $b > a$. En posant

$$\frac{b}{r} = u,$$

on a

$$\theta = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \qquad k = \frac{a}{b}.$$

Donc

$$u = \operatorname{sn}\theta, \qquad r = \frac{b}{\operatorname{sn}\theta}.$$

Telle est l'équation de la courbe.

2° Soit $b < a$. En posant

$$\frac{a}{r} = v,$$

on a

$$\theta = k\int_0^v \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}}, \qquad k = \frac{b}{a}.$$

Donc

$$v = \operatorname{sn}\frac{\theta}{k}, \qquad r = \frac{a}{\operatorname{sn}\frac{\theta}{k}}.$$

3° Si $b = a$, on est dans un cas de dégénérescence, $k = 1$:

$$r = a\frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{e^{\theta} - e^{-\theta}} \text{ (}^1\text{)}.$$

2. Les neuf cosinus qui servent à définir la position relative de deux trièdres trirectangles peuvent s'exprimer en fonction de trois paramètres a, u, λ au moyen des formules suivantes

$$\gamma = i\frac{\mathrm{H}(a)\mathrm{H}(u)}{\Theta_1(a)\Theta_1(u)}, \qquad \alpha + i\beta = -i\frac{\Theta_1(0)\Theta_1(u-a)}{\Theta_1(a)\Theta_1(u)}e^{i\lambda},$$

$$\gamma' = \frac{\mathrm{H}_1(a)\mathrm{H}_1(u)}{\Theta_1(a)\Theta_1(u)}, \qquad \alpha' + i\beta' = \frac{\Theta(0)\Theta(u-a)}{\Theta_1(a)\Theta_1(u)}e^{i\lambda},$$

$$\gamma'' = -\frac{\Theta(a)\Theta(u)}{\Theta_1(a)\Theta_1(u)}, \qquad \alpha'' + i\beta'' = \frac{\mathrm{H}_1(0)\mathrm{H}_1(u-a)}{\Theta_1(a)\Theta_1(u)}e^{i\lambda},$$

dans lesquelles on suppose u et λ réels et a purement imaginaire.

Il suffit de vérifier

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1,$$

$$(\alpha + i\beta)^2 + (\alpha' + i\beta')^2 + (\alpha'' + i\beta'')^2 = 0,$$

$$\gamma(\alpha + i\beta) + \gamma'(\alpha' + i\beta') + \gamma''(\alpha'' + i\beta'') = 0,$$

$$(\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) + (\alpha' + i\beta')(\alpha' - i\beta') + (\alpha'' + i\beta'')(\alpha'' - i\beta'') = 2.$$

(¹) GREENHILL, *Fonctions elliptiques*, p. 138.

Cela résulte des identités suivantes

$$\Theta_1^2(a)\,\Theta_1^2(u) - \mathrm{H}_1^2(a)\,\mathrm{H}_1^2(u) = \Theta^2(a)\,\Theta^2(u) - \mathrm{H}^2(a)\,\mathrm{H}^2(u),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\mathrm{H}_1(0)\,\mathrm{H}_1(u-a)\,\Theta_1(a)\,\Theta_1(u) - \Theta_1(0)\,\Theta_1(u-a)\,\mathrm{H}_1(a)\,\mathrm{H}_1(u) = \Theta(0)\,\Theta(u-a)\,\mathrm{H}(a)\,\mathrm{H}(u),$$

$$\Theta_1^2(0)\,\Theta_1(u-a)\,\Theta_1(u+a) = \Theta^2(a)\,\Theta^2(u) + \mathrm{H}_1^2(a)\,\mathrm{H}_1^2(u),$$

$$\Theta^2(0)\,\Theta(u-a)\,\Theta(u+a) = \Theta_1^2(a)\,\Theta_1^2(u) - \mathrm{H}_1^2(a)\,\mathrm{H}_1^2(u),$$

$$\mathrm{H}_1^2(0)\,\mathrm{H}_1(u-a)\,\mathrm{H}_1(u+a) = \Theta_1^2(a)\,\Theta_1^2(u) - \Theta^2(a)\,\Theta^2(u),$$

et d'une autre identité qui se déduit de la première de celles-ci en y remplaçant a par o et u par $u-a$.

3. Vérifier que les valeurs précédentes des neuf cosinus satisfont aux relations

$$(\alpha' - i\beta')(\alpha'' + i\beta'') = -\gamma'\gamma'' + i\gamma,$$
$$(\alpha'' - i\beta'')(\alpha + i\beta) = -\gamma''\gamma + i\gamma',$$
$$(\alpha - i\beta)(\alpha' + i\beta') = -\gamma\gamma' + i\gamma'',$$

équivalentes au système suivant

$$\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0, \qquad \gamma = \alpha'\beta'' - \beta'\alpha'',$$
$$\alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma = 0, \qquad \gamma' = \alpha''\beta - \beta''\alpha,$$
$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0, \qquad \gamma'' = \alpha\beta' - \beta\alpha'.$$

(D'après cela les deux trièdres dont la position relative est définie à l'aide de ces cosinus ont même disposition.)

CHAPITRE VI.

FONCTION $\wp$ A PÉRIODES IMAGINAIRES CONJUGUÉES. DISCRIMINANT NÉGATIF.

I. — Le discriminant est négatif. Valeurs réelles de $\wp u$ et de $\wp' u$.

132. **Objet de ce paragraphe.** — Supposons qu'on ait pris pour périodes primitives d'une fonction $\wp u$ les quantités imaginaires conjuguées

$$2\omega_1 = \omega_2 - \omega_2', \qquad 2\omega_3 = \omega_2 + \omega_2',$$

ω_2 désignant une quantité réelle et ω_2' une quantité purement imaginaire; nous allons montrer que les invariants sont réels, que la valeur de la fonction est réelle quand l'argument est réel ou purement imaginaire et nous en déduirons que le discriminant $g_2^3 - 27g_3^2$ est négatif.

133. **Les invariants sont réels.** — Les invariants sont donnés par les égalités

$$\frac{1}{60}g_2 = \sum{}' \frac{1}{(2m\omega_1 + 2n\omega_3)^4}, \qquad \frac{1}{140}g_3 = \sum{}' \frac{1}{(2m\omega_1 + 2n\omega_3)^6}.$$

Comme les quantités

$$2m\omega_1 + 2n\omega_3, \qquad 2m\omega_3 + 2n\omega_1$$

sont imaginaires conjuguées, on peut, dans chacune des séries précédentes, associer deux à deux les termes de façon que leur somme soit réelle. Donc les invariants g_2 et g_3 sont réels.

134. **Arguments réels, purement imaginaires, imaginaires conjugués.** — *Arguments réels.* — De même dans la série

$$\wp u - \frac{1}{u^2} = \sum{}' \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right]$$

$$\left\{\begin{array}{l} w = 2m\omega_1 + 2n\omega_3, \\ \left.\begin{array}{c} m \\ n \end{array}\right\} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \ldots, \\ w = 0 \text{ exclus.} \end{array}\right.$$

si l'on suppose u réel, on peut associer deux à deux les termes de façon que leur somme soit réelle. Donc, pour un argument réel, la valeur de la fonction pu est réelle.

On voit de même que la dérivée

$$p'u = -\frac{2}{u^3} - 2\sum{}' \frac{1}{(u-w)^3}$$

est réelle quand u est réel; elle garde un signe constant quand u varie de o à ω_2, puisqu'elle ne devient ni nulle ni infinie dans cet intervalle, et comme elle est négative pour u positif et très petit, elle est constamment négative quand u varie de o à ω_2; pu va constamment en décroissant depuis $+\infty$ jusqu'à $p\omega_2$.

Argument purement imaginaire. — Pour voir si la fonction $p(iu)$ est réelle quand u est réel, remarquons que l'on change seulement le signe de la fonction pu quand on multiplie par i l'argument et les deux périodes. On a donc

$$p(iu \mid \omega_1, \omega_3) = -p(u \mid i\omega_1, i\omega_3),$$

où

$$i\omega_1 = \frac{i\omega_2}{2} + \frac{\omega_2'}{2i}, \qquad i\omega_3 = \frac{i\omega_2}{2} - \frac{\omega_2'}{2i};$$

puis, comme on peut toujours changer le signe d'une période,

$$p(iu \mid \omega_1, \omega_3) = -p(u \mid i\omega_1, -i\omega_3).$$

Pour la fonction du second membre les deux périodes sont imaginaires conjuguées. Si donc u est réel on est ramené au cas déjà étudié.

En prenant les dérivées des deux membres de la relation que nous venons d'obtenir, on trouve

$$i\,p'(iu \mid \omega_1, \omega_3) = -p'(u \mid i\omega_1, -i\omega_3).$$

Les deux égalités précédentes montrent que si u est réel $p(iu \mid \omega_1, \omega_3)$ est réel et $p'(iu \mid \omega_1, \omega_3)$ purement imaginaire.

Ces égalités peuvent s'écrire, en mettant en évidence les invariants g_2 et g_3 au lieu des périodes ω_1 et ω_3,

$$p(iu; g_2, g_3) = -p(u; g_2, -g_3),$$
$$i\,p'(iu; g_2, g_3) = -p'(u; g_2, -g_3);$$

ces formules résultent de ce que, si l'on remplace

$$\omega_1, \qquad \omega_3$$

par

$$i\omega_1, \qquad -i\omega_3,$$

dans les séries qui donnent g_2 et g_3, g_2 ne change pas et g_3 se reproduit multiplié par -1.

Arguments imaginaires conjugués. — A deux valeurs u et u_0 imaginaires conjuguées de l'argument correspondent, pour la fonction, deux valeurs imaginaires conjuguées. En effet, on a

$$pu = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right],$$
$$pu_0 = \frac{1}{u_0^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u_0-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right].$$

Il s'agit de montrer que, si l'on change i en $-i$ dans l'expression de pu_0, cette expression se change en pu.

Si l'on change i en $-i$ dans la deuxième série on trouve, en désignant par w_0 la quantité imaginaire conjuguée de w,

$$\frac{1}{u^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u-w_0)^2} - \frac{1}{w_0^2}\right];$$

il reste donc à vérifier que l'on a

$$\sum{}' \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right] = \sum{}' \left[\frac{1}{(u-w_0)^2} - \frac{1}{w_0^2}\right]:$$

cela résulte de ce que la quantité imaginaire conjuguée de

$$w = 2m\omega_1 + 2n\omega_3$$

est la quantité

$$w_0 = 2m\omega_3 + 2n\omega_1,$$

et que, dans chacune des sommes précédentes, m et n prennent toutes les valeurs entières ($w = 0$ exclus). On peut donc passer de la valeur de pu à la valeur de pu_0 en changeant i en $-i$; ces deux valeurs sont imaginaires conjuguées. C'est ce que nous voulions vérifier.

135. **Parmi les racines e_1, e_2, e_3, l'une e_2 est réelle et les deux autres imaginaires conjuguées. Le discriminant est négatif.** — Nous

pouvons maintenant vérifier que les racines du polynome en $p u$

$$4(p u)^3 - g_2 p u - g_3$$

sont l'une réelle et les deux autres imaginaires conjuguées. Ce polynome étant égal à $(p' u)^2$, ses racines sont

$$e_1 = p \omega_1, \qquad e_3 = p \omega_3, \qquad e_2 = p(\omega_1 + \omega_3)$$

ou bien

$$e_1 = p\left(\frac{\omega_2}{2} - \frac{\omega'_2}{2}\right), \qquad e_3 = p\left(\frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega'_2}{2}\right), \qquad e_2 = p \omega_2.$$

On voit déjà que la dernière est réelle, puisque ω_2 est réel; la première racine peut s'obtenir en prenant la formule d'addition

$$p(u+v) = -p u - p v + \frac{p'^2 u + p'^2 v - 2 p' u p' v}{4(p u - p v)^2},$$

et en y faisant

$$u = \frac{\omega_2}{2}, \qquad v = -\frac{\omega'_2}{2};$$

$p u$ et $p' u$ sont réelles; $p v$ est réelle et $p' v$ purement imaginaire. Donc $e_1 = p \omega_1$ est imaginaire. La même formule montre que $e_3 = p \omega_3$ est la quantité imaginaire conjuguée de e_1 (ce qui devait être puisque ω_1 et ω_3 sont des quantités imaginaires conjuguées.)

Puisque, sur les trois racines e_1, e_2, e_3, il y en a une réelle et deux imaginaires conjuguées, le discriminant $g_2^3 - 27 g_3^2$ est négatif.

Distinction des racines imaginaires par le signe du coefficient de i. — Nous pouvons distinguer les deux racines imaginaires en considérant, dans chacune d'elles, le signe du coefficient de i.

La racine e_1 s'obtient en faisant $u = \frac{\omega_2}{2}$, $v = -\frac{\omega'_2}{2}$ dans la valeur précédente de $p(u+v)$; le coefficient de i dans le résultat a le signe de $-\frac{1}{i} p' u p' v$, et, comme $p' u$ est négatif pour $u = \frac{\omega_2}{2}$, le signe à considérer est celui de

$$\frac{1}{i} p' v = \frac{1}{i} p'\left(-\frac{\omega'_2}{2}\right) = -\frac{1}{i} p'\left(\frac{\omega'_2}{2}\right) = i p'\left(\frac{\omega'_2}{2}\right);$$

comme l'argument $\frac{\omega'_2}{2}$ est purement imaginaire, servons-nous de la formule

$$i\wp'(iu;\, g_2, g_3) = -\wp'(u;\, g_2, -g_3);$$

nous trouverons

$$i\wp'\left(\frac{\omega'_2}{2};\, g_2, g_3\right) = -\wp'\left(\frac{\omega'_2}{2i};\, g_2, -g_3\right).$$

Or le signe du second membre est le signe $+$, puisque, quand u varie en restant réel de o à $\frac{\omega'_2}{i}$, $\wp'(u;\, g_2, -g_3)$ est constamment négatif.

Donc, pour la racine e_1, le coefficient de i a le signe $+$; pour la racine e_3, le coefficient de i a le signe $-$.

Remarque. — On a, quel que soit u,

$$\wp(u + \omega_2) = \wp(u + \omega'_2).$$

En effet, la période $2\omega_1$ étant égale à $\omega_2 - \omega'_2$, on peut écrire

$$\wp(u + \omega'_2) = \wp(u + \omega'_2 + 2\omega_1) = \wp(u + \omega_2).$$

136. **Valeurs de u pour lesquelles $\wp u$ et $\wp' u$ sont réelles toutes les deux.** — Nous avons vu que, quand u croît de zéro à ω_2, $\wp u$ et $\wp' u$ sont réelles toutes les deux : $\wp' u$ varie d'une manière continue de $-\infty$ à zéro, $\wp u$ décroît constamment de $+\infty$ jusqu'à $e_2 = \wp\omega_2$. Nous voulons maintenant définir toutes les valeurs de u qui rendent réelles $\wp u$ et $\wp' u$. Considérons la relation

$$\wp'^2(u) = 4(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3);$$

si $\wp u$ est réel, le premier et le troisième facteur sont imaginaires conjugués, leur produit est positif : pour que $\wp' u$ soit réel il faut que l'on ait

$$\wp u > e_2.$$

Soit a une valeur réelle plus grande que e_2; il y a un argument réel v, compris entre o et ω_2, pour lequel on a

$$\wp u = a;$$

toutes les autres solutions de cette équation sont données par la

formule

$$u = \pm v + 2m\omega_1 + 2n\omega_3,$$

m et n étant des nombres entiers.

On conclut de là que, si un argument u rend réelles la fonction $\wp u$ et sa dérivée $\wp' u$, on peut toujours, en ajoutant des périodes, le ramener à être réel et compris entre $-\omega_2$ et $+\omega_2$.

II. — Expression des périodes par des intégrales définies de la forme normale de Legendre, dans le cas du discriminant négatif.

137. Expression des périodes en fonction des invariants. — Les périodes étant, comme plus haut, définies par les égalités

$$2\omega_1 = \omega_2 - \omega'_2, \qquad 2\omega_3 = \omega_2 + \omega'_2,$$

on a vu que, si u croît de o à ω_2, $\wp u$ décroît constamment de $+\infty$ à e_2. L'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $x = \wp u$ étant mise sous la forme

$$du = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}},$$

on obtient, en faisant croître u de o à ω_2, l'égalité

$$\omega_2 = \int_{e_2}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}$$

qui donne l'expression de ω_2 en fonction de g_2 et de g_3.

Pour avoir l'expression correspondante de $\frac{\omega'_2}{i}$ remarquons que si l'on remplace les périodes $2\omega_1$ et $2\omega_3$ par les suivantes

$$2i\omega_1 = \frac{\omega'_2}{i} + i\omega_2, \qquad -2i\omega_3 = \frac{\omega'_2}{i} - i\omega_2,$$

il faut remplacer

$$\omega_2, \quad g_2, \quad g_3, \quad e_2$$

par

$$\frac{\omega'_2}{i}, \quad g_2, \quad -g_3, \quad -e_2.$$

L'égalité précédente devient, par ce changement,

$$\frac{\omega'_2}{i} = \int_{-e_2}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x + g_3}}.$$

138. Les intégrales donnant les valeurs de ω_2 et $\frac{\omega'_2}{i}$ ramenées à la forme canonique de Legendre. — L'intégrale qui donne la valeur de ω_2 peut s'écrire

$$\omega_2 = \int_{e_2}^{\infty} \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}.$$

Faisons le changement de variable

$$x - e_2 = z^2,$$

l'intégrale devient

$$\omega_2 = \int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{(z^2+e_2-e_1)(z^2+e_2-e_3)}}.$$

Les quantités $e_2 - e_1$ et $e_2 - e_3$ sont imaginaires conjuguées. Posons

$$e_2 - e_3 = \rho(\cos\psi + i\sin\psi) \qquad \rho > 0,$$
$$e_2 - e_1 = \rho(\cos\psi - i\sin\psi) \qquad 0 < \psi < \pi.$$

Ayant pris ρ positif, nous pouvons choisir ψ entre 0 et π, puisque e_1 désigne la racine imaginaire pour laquelle le coefficient de i est positif. Le polynome bicarré qui se trouve sous le radical peut alors s'écrire

$$z^4 + 2z^2\rho\cos\psi + \rho^2 = (z^2+\rho)^2 - 4z^2\rho\sin^2\frac{\psi}{2},$$

de sorte qu'en posant

$$z = t\sqrt{\rho}, \qquad \sin^2\frac{\psi}{2} = k_1^2,$$

on a

$$\omega_2\sqrt{\rho} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)^2 - 4k_1^2t^2}};$$

le coefficient différentiel de la nouvelle intégrale ne fait que changer de signe quand on pose

$$t = \frac{1}{t'}$$

et que l'on néglige ensuite l'accent. On en déduit

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)^2 - 4k_1^2t^2}} = \int_1^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)^2 - 4k_1^2t^2}},$$

puis

$$\omega_2\sqrt{\rho} = 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)^2-4k_1^2t^2}}$$

$$= \int_0^1 \frac{\dfrac{2\,dt}{1+t^2}}{\sqrt{1-k_1^2\left(\dfrac{2t}{1+t^2}\right)^2}};$$

et il n'y a plus qu'à poser

$$\frac{2t}{1+t^2} = \sin\varphi \qquad \text{ou} \qquad t = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2},$$

pour obtenir l'égalité

$$\omega_2\sqrt{\rho} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi}},$$

dans laquelle l'intégrale est de la forme normale de Legendre (*voir* n° **111**).

Transformons de même l'intégrale

$$\frac{\omega'_2}{i} = \int_{-e_2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x+g_3}} = \int_{-e_2}^{+\infty} \frac{dx}{2\sqrt{(x+e_1)(x+e_2)(x+e_3)}}.$$

En faisant le changement de variable

$$x = -e_2+z^2,$$

il vient

$$\frac{\omega'_2}{i} = \int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{(z^2+e_1-e_2)(z^2+e_3-e_2)}},$$

puis, en introduisant, comme dans ce qui précède, le module et l'argument des quantités imaginaires conjuguées e_1-e_2, e_3-e_2,

$$\frac{\omega'_2}{i} = \int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{(z^2+\rho)^2-4z^2\rho\cos^2\dfrac{\psi}{2}}}.$$

Posons

$$z = t\sqrt{\rho}, \qquad \cos^2\frac{\psi}{2} = k_1'^2,$$

nous trouverons

$$\sqrt{\rho}\,\frac{\omega'_2}{i} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)^2-4k_1'^2t^2}},$$

et, en tenant compte de l'égalité

$$\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)^2-4k_1'^2 t^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_1'^2 \sin^2\varphi}},$$

nous obtenons pour $\frac{\omega_2'}{i}$ une expression de la forme cherchée.

Réunissons les deux formules qui viennent d'être démontrées

$$\omega_2\sqrt{\rho} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi}}, \qquad k_1^2 = \sin^2\frac{\psi}{2},$$

$$\frac{\omega_2'}{i}\sqrt{\rho} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_1'^2\sin^2\varphi}}, \qquad k_1'^2 = \cos^2\frac{\psi}{2},$$

ρ et ψ étant définis par les égalités

$$e_2 - e_3 = \rho(\cos\psi + i\sin\psi), \qquad \rho > 0,$$
$$e_2 - e_1 = \rho(\cos\psi - i\sin\psi), \qquad 0 < \psi < \pi.$$

Ces dernières intégrales, dans lesquelles on fait

$$\sin\varphi = z,$$

prennent la forme des intégrales qui donnent K et K′ dans le n° 108.

139. Variation du rapport $\frac{i\omega_2}{\omega_2'}$. — Des égalités précédentes on déduit

$$\frac{i\omega_2}{\omega_2'} = \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi}}}{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_1'^2\sin^2\varphi}}},$$

et l'on voit que le rapport $\frac{i\omega_2}{\omega_2'}$ augmente constamment quand k_1^2 croît de 0 à 1, car le numérateur augmente et le dénominateur diminue. Ce rapport est égal à zéro pour $k_1^2 = 0$, il est égal à $+\infty$ pour $k_1^2 = 1$; il passe donc une fois et une fois seulement par une valeur positive donnée quand k_1^2 croît de 0 à 1.

On peut alors vérifier, en se servant des seules intégrales ci-

dessus, que, si les valeurs de ω_2 et de $\frac{\omega_2'}{i}$ sont données, chacune des racines e_1, e_2, e_3 a une valeur unique. En effet $\frac{i\omega_2}{\omega_2'}$ ayant une valeur positive donnée, k_1^2 a une valeur unique comprise entre o et 1; k_1^2 étant ainsi déterminé, l'égalité qui définit ω_2, par exemple, montre que $\sqrt{\rho}$ a une valeur unique, le radical étant pris avec le signe $+$. Pour passer de là aux valeurs de e_1, e_2, e_3 remarquons que $\cos\psi$ et $\sin\psi$, définis par

$$\cos\psi = k_1'^2 - k_1^2, \qquad \sin\psi = 2k_1 k_1', \qquad 0 < \psi < \pi,$$

sont déterminés sans ambiguïté. Alors les égalités

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \qquad e_2 - e_3 = \rho(\cos\psi + i\sin\psi),$$
$$e_2 - e_1 = \rho(\cos\psi - i\sin\psi)$$

déterminent une valeur unique pour chacune des racines e_1, e_2, e_3.

III. — Retour a la fonction p a discriminant positif. Expressions des périodes sous la forme canonique de Legendre.

140. Les intégrales qui définissent les périodes ramenées à la forme canonique de Legendre. — Nous allons ramener à la forme canonique de Legendre les intégrales qui définissent ω et $\frac{\omega'}{i}$, dans le cas où e_1, e_2, e_3 sont réelles. (*Voir* nos 53 et 54).

On a d'abord

$$\omega = \int_{e_1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = \int_{e_1}^{+\infty} \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}.$$

Dans cette intégrale, faisons le changement de variable

$$x = e_3 + \frac{g^2}{z^2}, \qquad dx = -\frac{2g^2\,dz}{z^3},$$

g étant une constante indéterminée; l'élément de l'intégrale devient

$$\frac{-dz}{g\sqrt{\left(1 - \frac{e_1 - e_3}{g^2} z^2\right)\left(1 - \frac{e_2 - e_3}{g^2} z^2\right)}}.$$

Dans le produit qui figure sous le radical le premier facteur se

réduira à $1 - z^2$, si nous posons

$$g^2 = e_1 - e_3,$$

et le second facteur deviendra alors $(1 - k^2 z^2)$ en posant

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3};$$

k^2 est un nombre positif et plus petit que un : le coefficient différentiel a donc la forme cherchée. En mettant maintenant les nouvelles limites de l'intégrale, nous trouvons

$$g\omega = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}},$$

ce qui est la forme cherchée.

Transformons de même l'intégrale

$$\frac{\omega'}{i} = \int_{-e_3}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x_3 - g_2 x + g_3}} = \int_{-e_3}^{+\infty} \frac{dx}{2\sqrt{(x + e_1)(x + e_2)(x + e_3)}};$$

en faisant le changement de variable

$$x = -e_1 + \frac{g^2}{z^2}, \qquad dx = -2g^2\frac{dz}{z^3},$$

l'élément de l'intégrale devient

$$\frac{-dz}{g\sqrt{\left(1 - \frac{e_1 - e_2}{g^2} z^2\right)\left(1 - \frac{e_1 - e_3}{g^2} z^2\right)}};$$

sous le radical, le second facteur devient égal à $1 - z^2$ si nous posons

$$g^2 = e_1 - e_3,$$

et le premier facteur devient alors $1 - k'^2 z^2$ en posant

$$k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3},$$

k'^2 est positif et plus petit que 1. Nous avons donc

$$g\frac{\omega'}{i} = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k'^2 z^2)}}.$$

Réunissons les deux résultats précédents, en faisant dans les intégrales le changement de variable $z = \sin\varphi$, nous avons

$$\omega g = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}},$$

$$\frac{\omega'}{i} g = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\varphi}},$$

$$g = \sqrt{e_1 - e_3}, \qquad k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \qquad k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}, \qquad k^2 + k'^2 = 1.$$

On nomme g le multiplicateur; k est le module, k' le module complémentaire.

141. **Variation du rapport $\frac{\omega'}{i\omega}$.** — Considérons, maintenant, le rapport

$$\frac{\omega'}{i\omega} = \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\varphi}}}{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}}.$$

En raisonnant comme au n° 139 on reconnaît que, si k^2 croît de o à 1, le rapport $\frac{\omega'}{i\omega}$ décroît constamment de $+\infty$ à o.

D'après cela, on peut encore vérifier qu'il n'y a qu'un seul système de valeurs de k^2 et de g pour lequel les intégrales ω et $\frac{\omega'}{i}$ prennent des valeurs données, si l'on suppose g positif et k^2 pris entre o et 1. En effet, le rapport $\frac{\omega'}{i\omega}$ ayant une valeur donnée, il n'y a pour k^2 qu'une seule valeur comprise entre o et 1; k^2 étant déterminé, l'égalité qui donne la valeur de $g\omega$, par exemple, donnera pour g une valeur unique.

Les quantités k^2 et g étant déterminées, on a immédiatement

$$e_1 - e_3, \qquad e_2 - e_3.$$

La somme de ces quantités donne $-3e_3$, puis des différences connues $e_1 - e_3$, $e_2 - e_3$ on déduit e_1 et e_2.

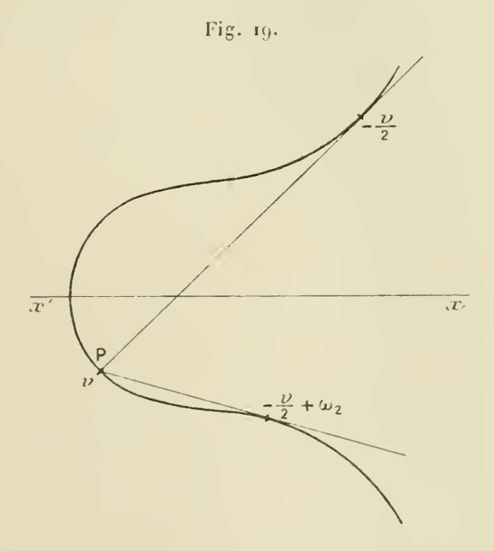
IV. — Cas du discriminant négatif. Application géométrique.

142. Étude de la courbe $x = pu$, $y = p'u$, $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$. — Nous insisterons seulement sur les différences que le cas de $\Delta < 0$ présente avec le cas déjà étudié de $\Delta > 0$.

Si x et y sont tous deux réels, on peut toujours, en ajoutant des périodes, ramener l'argument à être réel et compris entre $-\omega_2$ et $+\omega_2$ (n° 136). Quand on change u en $-u$, x ne change pas, y change de signe; la courbe est donc symétrique par rapport à Ox et il suffit de faire varier u de 0 à ω_2.

Quand u croît de 0 à ω_2, y est négatif, x décroît constamment de $+\infty$ à e_2. La tangente au point situé sur Ox est parallèle à Oy; la direction asymptotique est celle de Oy. On a donc la forme de courbe indiquée par la *fig.* 19.

Fig. 19.



La courbe n'a pas de points en dehors de la branche infinie, comme cela se présentait dans le cas du discriminant positif.

Tangentes parallèles à Ox. — Les points où la tangente est parallèle à Ox sont donnés par l'équation

$$p''(u) = 6x^2 - \frac{1}{2} g_2 = 0, \qquad x = pu,$$

Quand g_2 est négatif, il n'y a pas de points où la tangente soit parallèle à Ox.

Quand g_2 est positif, les deux valeurs de x qui annulent $p''u$ sont réelles; mais pour qu'à une valeur réelle de x corresponde une valeur réelle de y, il faut que l'on ait

$$x > e_2.$$

Nous avons donc à chercher, en supposant $g_2 > 0$, combien l'équation

$$p''u = 6x^2 - \frac{1}{2} g_2 = 0$$

a de racines plus grandes que e_2 et nous sommes ainsi conduits à substituer e_2 à la place de x dans le polynome entier en x qui donne la valeur de $p''u$.

Ce polynome se présente sous une forme plus commode, si l'on dérive par rapport à u les deux membres de l'identité

$$p'^2 u = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3), \qquad x = pu.$$

On trouve, après avoir supprimé le facteur commun $p'u$,

$$\frac{1}{2} p''u = (x - e_2)(x - e_3) + (x - e_1)(x - e_3) + (x - e_1)(x - e_2),$$

et la valeur du polynome pour $x = e_2$ est

$$(e_2 - e_1)(e_2 - e_3);$$

comme les deux facteurs $e_2 - e_1$, $e_2 - e_3$ sont imaginaires conjugués, le résultat de la substitution est positif. Donc e_2 est supérieur à la plus grande racine ou inférieur à la plus petite, et comme ces deux racines sont de signes contraires, c'est le premier cas qui se présente quand e_2 est positif et le second quand e_2 est négatif. Le signe de e_2 est le même que celui de g_3 puisque l'on a

$$g_3 = e_1 e_3 e_2.$$

En définitive, pour qu'il existe sur la courbe des points où la tangente est parallèle à Ox, il faut et il suffit que l'on ait

$$g_2 > 0, \qquad g_3 < 0.$$

Dans le cas contraire la courbe présente la forme de la *fig.* 19.

Tangentes menées d'un point P. — Si le point P a pour paramètre v, les points de contact ont pour paramètres

$$u_0 = -\frac{v}{2}, \qquad u_1 = -\frac{v}{2} + \omega_1, \qquad u_2 = -\frac{v}{2} + \omega_1 + \omega_3, \qquad u_3 = -\frac{v}{2} + \omega_3.$$

Comme v est réel et que ω_1 et ω_3 sont imaginaires conjugués, u_0 et u_2 sont réels, u_1 et u_3 imaginaires conjugués.

Ainsi, par un point de la courbe, on ne peut mener que deux tangentes réelles à la courbe.

V. — Discriminant négatif : application au mouvement d'un projectile dans un milieu dont la résistance est proportionnelle au cube de la vitesse ([1]).

143. Équations différentielles et intégrales premières. — Prenons pour origine O la position initiale du projectile, pour direction de l'axe des x, la direction de la vitesse initiale, pour axe des y la verticale descendante. Soit α l'angle de Ox avec l'horizontale, α étant regardé comme positif quand Ox est au-dessus de l'horizon : l'angle des axes est alors $\frac{\pi}{2} + \alpha$. La résistance de l'air est une force dirigée en sens inverse de la vitesse, et égale à cv^3, v désignant la vitesse, et c une constante.

En désignant par x et y les coordonnées du mobile, et par s l'arc décrit sur la trajectoire à partir d'une origine fixe, la force due à la résistance du milieu a pour projections sur les axes Ox, Oy

$$-c\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \frac{dx}{ds}, \qquad -c\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \frac{dy}{ds},$$

ou bien

$$-c\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{dx}{dt}, \qquad -c\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{dy}{dt},$$

et les équations du mouvement sont

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -c\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{dx}{dt},$$

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -c\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{dy}{dt} + g.$$

([1]) *Voir* Greenhill, *Fonctions elliptiques*, traduction de Griess, p. 375.

Éliminons entre les équations (1) et (2) les termes qui proviennent de la résistance; il vient

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = g\frac{dx}{dt},$$

ou bien, en posant $\mu = \frac{dy}{dx}$,

$$(3)\qquad \frac{d\mu}{dt}\frac{dx}{dt} = g.$$

D'autre part, en remplaçant, dans l'équation (1), ds par sa valeur tirée de

$$ds^2 = dy^2 - 2dy\,dx\sin\alpha + dx^2,$$

nous trouvons

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -c\left(\frac{dx}{dt}\right)^3(\mu^2 - 2\mu\sin\alpha + 1),$$

puis, en tenant compte de l'équation (3),

$$(4)\qquad -\frac{g}{c}\left(\frac{dx}{dt}\right)^{-4}\frac{d^2x}{dt^2} = (\mu^2 - 2\mu\sin\alpha + 1)\frac{d\mu}{dt}.$$

Les deux membres de l'équation (4) sont les dérivées de fonctions qui s'obtiennent immédiatement. Intégrons de 0 à t, il vient

$$\frac{1}{3}\frac{g}{c}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^{-3} - \left(\frac{dx}{dt}\right)_0^{-3}\right] = \frac{1}{3}\mu^3 - \mu^2\sin\alpha + \mu,$$

en remarquant que, d'après le choix des axes, $\mu = 0$ pour $t = 0$. Nous supposerons la vitesse initiale très grande, et nous négligerons le terme $\frac{1}{3}\frac{g}{c}\left(\frac{dx}{dt}\right)_0^{-3}$ de sorte que, en posant $\frac{g}{c} = w^3$ et

$$P = \mu^3 - 3\mu^2\sin\alpha + 3\mu,$$

on a

$$(5)\qquad \frac{dx}{dt} = wP^{-\frac{1}{3}}.$$

L'équation (3) donne alors

$$\frac{g}{w}dt = P^{-\frac{1}{3}}d\mu,$$

et, en intégrant,

(6) $$\frac{gt}{w} = \int_0^\mu \mathrm{P}^{-\frac{1}{3}} d\mu = \int_0^\mu \frac{d\mu}{(\mu^3 - 3\mu^2 \sin\alpha + 3\mu)^{\frac{1}{3}}}.$$

D'autre part, en remarquant que l'équation (3) peut s'écrire

$$\frac{d\mu}{dx}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = g,$$

et en y remplaçant $\frac{dx}{dt}$ par sa valeur tirée de (5), on trouve

$$\frac{g}{w^2} dx = \mathrm{P}^{-\frac{2}{3}} d\mu,$$

puis

$$\frac{g}{w^2} dy = \mu \mathrm{P}^{-\frac{2}{3}} d\mu,$$

et enfin, en intégrant,

(7) $$\frac{g}{w^2} x = \int_0^\mu \mathrm{P}^{-\frac{2}{3}} d\mu = \int_0^\mu \frac{d\mu}{(\mu^3 - 3\mu^2 \sin\alpha + 3\mu)^{\frac{2}{3}}},$$

(8) $$\frac{g}{w^2} y = \int_0^\mu \mu \mathrm{P}^{-\frac{2}{3}} d\mu = \int_0^\mu \frac{\mu\, d\mu}{(\mu^3 - 3\mu^2 \sin\alpha + 3\mu)^{\frac{2}{3}}}.$$

Les équations (7) et (8) définissent la trajectoire au moyen de la variable auxiliaire μ et l'équation (6) donne la valeur de t pour chaque position du mobile. On voit de suite que le polynome

$$\mathrm{P} = \mu(\mu^2 - 3\mu \sin\alpha - 3)$$

n'a d'autres racines réelles que zéro, et l'on en conclut aisément que, quand μ croît de o à $+\infty$, t et y deviennent infinis, et x tend vers une limite : nous désignerons cette limite par a. Il est, en outre, facile de voir que la vitesse tend vers une valeur limite et que w est la valeur de cette limite. En effet, l'équation (5) montre que, pour $\mu = \infty$, on a

$$w = \lim \mu \frac{dx}{dt},$$

et l'égalité

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 (\mu^2 - 2\mu \sin\alpha + 1)$$

montre ensuite que, $\mu \frac{dx}{dt}$ ayant une limite, $\frac{ds}{dt}$ a une limite qui est la même.

Ainsi, la trajectoire admet une asymptote verticale, la droite $x = a$, et lorsque le mobile descend indéfiniment sur la branche de courbe asymptote à cette droite, la vitesse tend vers une valeur limite w.

144. Intégration par les fonctions elliptiques. — On peut ramener l'intégrale qui donne la valeur de $\frac{gx}{w^2}$ (équation 7) à une intégrale elliptique ayant la forme canonique de M. Weierstrass.

Pour cela, faisons la substitution

$$z = \frac{m^2 P^{\frac{1}{3}}}{\mu}, \qquad z^3 = m^6 \frac{\mu^2 - 3\mu \sin\alpha + 3}{\mu^2},$$

m étant un facteur constant arbitraire. Nous pourrons déterminer g_3 de façon que, dans l'expression

$$4z^3 - g_3 = \frac{(4m^6 - g_3)\mu^2 - 12 m^6 \mu \sin\alpha + 12 m^6}{\mu^2},$$

le trinome du second degré en μ soit carré parfait; il suffit de poser

$$4m^6 - g_3 = 3m^6 \sin^2\alpha,$$

d'où

$$g_3 = m^6(4 - 3\sin^2\alpha).$$

Il vient alors

$$\sqrt{4z^3 - g_3} = m^3\sqrt{3}\,\frac{2 - \mu \sin\alpha}{\mu},$$

et, en différentiant,

$$\frac{6z^2\,dz}{\sqrt{4z^3 - g_3}} = -\frac{2m^3\sqrt{3}\,d\mu}{\mu^2}.$$

Cette équation peut s'écrire

$$\frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_3}} = -\frac{m^3\sqrt{3}\,d\mu}{3\mu^2 z^2} = -\frac{d\mu}{m\sqrt{3}P^{\frac{2}{3}}} = -\frac{1}{m\sqrt{3}}\,g\,\frac{dx}{w^2};$$

en prenant $m^2 = \frac{1}{3}$, on a donc, en définitive,

$$\frac{gx}{w^2} = \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_3}}.$$

On en conclut

(9) $$z = \mathfrak{p}\left(\frac{gx}{w^2}; 0, g_3\right),$$

puis, d'après l'expression de dz,

$$\mathfrak{p}'\left(\frac{gx}{w^2}\right) = \frac{\mu \sin\alpha - 2}{3\mu},$$

Quand x est égal à l'abscisse a de l'asymptote verticale, $\mu = \infty$, on a

$$\mathfrak{p}'\left(\frac{ga}{w^2}\right) = \frac{\sin\alpha}{3}, \qquad \mathfrak{p}\left(\frac{ga}{w^2}\right) = \frac{1}{3},$$

et, par suite,

$$\mathfrak{p}'\left(\frac{ga}{w^2}\right) - \mathfrak{p}'\left(\frac{gx}{w^2}\right) = \frac{2}{3\mu}.$$

D'après cette dernière équation, on a

$$\mu = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{2}{3}}{\mathfrak{p}'\left(\frac{ga}{w^2}\right) - \mathfrak{p}'\left(\frac{gx}{w^2}\right)} = \frac{6\mathfrak{p}^2\left(\frac{ga}{w^2}\right)}{\mathfrak{p}'\left(\frac{ga}{w^2}\right) - \mathfrak{p}'\left(\frac{gx}{w^2}\right)},$$

et en intégrant

$$y = \int_0^x \frac{6\mathfrak{p}^2\left(\frac{ga}{w^2}\right)}{\mathfrak{p}'\left(\frac{ga}{w^2}\right) - \mathfrak{p}'\left(\frac{gx}{w^2}\right)}\,dx.$$

C'est l'équation de la trajectoire.

Écrivons u et v au lieu de $\frac{gx}{w^2}$ et de $\frac{ga}{w^2}$, l'équation prend la forme

(11) $$\frac{gy}{w^2} = \int_0^u \frac{6\mathfrak{p}^2 v\,du}{\mathfrak{p}'v - \mathfrak{p}'u},$$

et nous allons pouvoir l'intégrer en appliquant la règle du n° 50.

Pour rendre le dénominateur rationnel, multiplions par $\mathfrak{p}'v + \mathfrak{p}'u$ les deux termes de la fraction sous le signe somme et tenons compte de ce que, g_2 étant nul, on a

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}'^2 v - \mathfrak{p}'^2 u &= 4(\mathfrak{p}^3 v - \mathfrak{p}^3 u),\\ &= 4(\mathfrak{p}v - \mathfrak{p}u)(\varepsilon\mathfrak{p}v - \mathfrak{p}u)(\varepsilon^2\mathfrak{p}v - \mathfrak{p}u),\end{aligned}$$

ε et ε^2 étant les racines cubiques imaginaires de l'unité

$$\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \qquad \varepsilon^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

En opérant la décomposition en fractions simples, on a

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{6p^2v}{p'v - p'u} &= \frac{6p^2v(p'v + p'u)}{4(p^3v - p^3u)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{p'v + p'u}{pv - pu} + \frac{1}{2}\varepsilon\frac{p'v + p'u}{\varepsilon pv - pu} + \frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{p'v + p'u}{\varepsilon^2 pv - pu} \\ &= \frac{1}{2}\frac{p'v + p'u}{pv - pu} + \frac{1}{2}\varepsilon\frac{p'(\varepsilon v) + p'u}{p(\varepsilon v) - pu} + \frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{p'(\varepsilon^2 v) + p'u}{p(\varepsilon^2 v) - pu}; \end{aligned}\right.$$

car si dans la formule d'homogénéité

$$p\left(\frac{u}{\mu};\ \mu^4 g_2,\ \mu^6 g_3\right) = \mu^2 p(u;\ g_2,\ g_3),$$

on fait $g_2 = 0$ et $\mu = \varepsilon$ puis $\mu = \varepsilon^2$, et si l'on remarque que $\frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon^2$, on trouve

$$p(u\varepsilon^2;\ 0,\ g_3) = \varepsilon^2 p(u;\ 0,\ g_3),$$
$$p(u\varepsilon;\ 0,\ g_3) = \varepsilon p(u;\ 0,\ g_3),$$

puis, en prenant les dérivées

$$p'(u\varepsilon^2;\ 0,\ g_3) = p'(u;\ 0,\ g_3),$$
$$p'(u\varepsilon;\ 0,\ g_3) = p'(u;\ 0,\ g_3).$$

Des équations (11) et (12), on conclut

$$(13)\quad \frac{gy}{w^2} = \int_0^u \left(\frac{1}{2}\frac{p'v + p'u}{pv - pu} + \varepsilon\frac{1}{2}\frac{p'\varepsilon v + p'u}{p\varepsilon v - pu} + \varepsilon^2\frac{1}{2}\frac{p'\varepsilon^2 v + p'u}{p\varepsilon^2 v - pu}\right) du.$$

Mais, si dans la formule d'addition pour ζu [nº 44, éq. (65)], on change v en $-v$, il vient

$$\frac{1}{2}\frac{p'u + p'v}{pu - pv} = \zeta(u - v) - \zeta u + \zeta v.$$

Dans cette égalité changeons v en εv puis en $\varepsilon^2 v$ et remarquons que, d'après la formule d'homogénéité (nº 36), $\zeta(\varepsilon v) = \varepsilon^2\zeta v$ et $\zeta(\varepsilon^2 v) = \varepsilon\zeta v$, nous obtenons

$$\frac{1}{2}\frac{p'u + p'\varepsilon v}{pu - p\varepsilon v} = \zeta(u - \varepsilon v) - \zeta u + \varepsilon^2\zeta v,$$
$$\frac{1}{2}\frac{p'u + p'\varepsilon^2 v}{pu - p\varepsilon^2 v} = \zeta(u - \varepsilon^2 v) - \zeta u + \varepsilon\zeta v.$$

D'après cela l'équation (13) peut s'écrire, en tenant compte de

ce que $1+\varepsilon+\varepsilon^2$ est nul,

$$\frac{gy}{w^2}=\int_0^u[-3\zeta v-\zeta(u-v)-\varepsilon\zeta(u-\varepsilon v)-\varepsilon^2\zeta(u-\varepsilon^2 v)]\,du,$$

et l'on obtient enfin

$$\frac{gy}{w^2}=-3u\zeta v-\operatorname{Log}\frac{\sigma(v-u)}{\sigma v}-\varepsilon\operatorname{Log}\frac{\sigma(\varepsilon v-u)}{\sigma\varepsilon v}-\varepsilon^2\operatorname{Log}\frac{\sigma(\varepsilon^2 v-u)}{\sigma\varepsilon^2 v}.$$

L'expression du temps t se trouve au moyen de l'équation (6) qui donne, par un calcul analogue,

$$\frac{gt}{w}=\int_0^u\frac{6\wp v\wp u}{\wp' v-\wp' u}\,du$$
$$=\int_0^u\left(\frac{1}{2}\frac{\wp' u+\wp' v}{\wp v-\wp u}+\frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{\wp'\varepsilon v+\wp' u}{\wp\varepsilon v-\wp u}+\frac{1}{2}\varepsilon\frac{\wp'\varepsilon^2 v+\wp' u}{\wp\varepsilon^2 v-\wp u}\right)du,$$

d'où

$$\frac{gt}{w}=-\operatorname{Log}\frac{\sigma(v-u)}{\sigma v}-\varepsilon^2\operatorname{Log}\frac{\sigma(\varepsilon v-u)}{\sigma\varepsilon v}-\varepsilon\operatorname{Log}\frac{\sigma(\varepsilon^2 v-u)}{\sigma\varepsilon^2 v}.$$

145. **Développement de y et de t en séries entières ordonnées suivant les puissances de $u=g\frac{x}{w^2}$.** — Lorsqu'on se propose de développer y et t suivant les puissances entières de u, il est commode d'employer la fonction

$$\psi(u,v)=\frac{\sigma(v-u)}{\sigma v}e^{u\zeta v},$$

qui est égale à 1 pour $u=0$. Il vient alors

$$\frac{gy}{w^2}=-\operatorname{Log}\psi(u,v)-\varepsilon\operatorname{Log}\psi(u,\varepsilon v)-\varepsilon^2\operatorname{Log}\psi(u,\varepsilon^2 v),$$
$$\frac{gt}{w}=-\operatorname{Log}\psi(u,v)-\varepsilon^2\operatorname{Log}\psi(u,\varepsilon v)-\varepsilon\operatorname{Log}\psi(u,\varepsilon^2 v).$$

Prenons les dérivées logarithmiques et développons suivant les puissances de u par la formule de Taylor :

$$\frac{1}{\psi}\frac{d\psi}{du}=-\zeta(v-u)+\zeta v=-u\wp v+\frac{u^2}{2!}\wp' v-\frac{u^3}{3!}\wp'' v+\ldots;$$

en intégrant de nouveau, on obtient

$$(18)\qquad \operatorname{Log}\psi(u,v) = -\frac{u^2}{2!}\,\mathrm{p}v + \frac{u^3}{3!}\,\mathrm{p}'v - \frac{u^4}{4!}\,\mathrm{p}''v + \ldots.$$

Donc, en remarquant que $g_2 = 0$ et $\mathrm{p}\varepsilon v = \varepsilon\mathrm{p}v$

$$(19)\qquad \operatorname{Log}\psi(u,\varepsilon v) = -\frac{u^2}{2!}\,\varepsilon\mathrm{p}v + \frac{u^3}{3!}\,\mathrm{p}'v - \frac{u^4}{4!}\,\varepsilon^2\mathrm{p}''v\ldots,$$

$$(20)\qquad \operatorname{Log}\psi(u,\varepsilon^2 v) = -\frac{u^2}{2!}\,\varepsilon^2\mathrm{p}v + \frac{u^3}{3!}\,\mathrm{p}'v - \frac{u^4}{4!}\,\varepsilon\mathrm{p}''v\ldots.$$

On en conclut

$$\frac{gy}{w^2} = 3\left[\frac{u^4}{4!}\,\mathrm{p}''v - \frac{u^7}{7!}\,\mathrm{p}^{(5)}v + \frac{u^{10}}{10!}\,\mathrm{p}^{(8)}v + \ldots\right],$$

$$\frac{gt}{w} = 3\left[\frac{u^2}{2!}\,\mathrm{p}v - \frac{u^5}{5!}\,\mathrm{p}'''v + \frac{u^8}{8!}\,\mathrm{p}^{(6)}v + \ldots\right].$$

Dans ces formules, on doit poser

$$u = \frac{gx}{w^2},\qquad g_2 = 0,\qquad g_3 = \frac{1}{27}(4 - 3\sin^2\alpha),$$

$$\mathrm{p}v = \frac{1}{3},\qquad \mathrm{p}'v = \frac{1}{3}\sin\alpha,\qquad \mathrm{p}''v = \frac{2}{3},\qquad \mathrm{p}'''v = \frac{4}{3}\sin\alpha,\qquad \ldots.$$

Le discriminant étant négatif, les périodes de p s'expriment à l'aide des formules des n°s 137 et suivants.

Les dérivées $\mathrm{p}''v$, $\mathrm{p}'''v$, ... se calculent par voie récurrente, en dérivant un nombre quelconque de fois la relation

$$(\mathrm{p}'u)^2 = 4\mathrm{p}^3u - g_3$$

et faisant ensuite $u = v$.

CHAPITRE VII.

INTÉGRALES ELLIPTIQUES. RÉDUCTION A LA FORME NORMALE DE LEGENDRE ET DE JACOBI. INVERSION.

I. — Intégrales elliptiques.

146. **Exemple élémentaire de la méthode employée pour calculer les intégrales elliptiques.** — On démontre, dans les éléments du Calcul intégral, que l'intégrale d'une fonction rationnelle de x et de la racine carrée d'un trinome du second degré $\sqrt{ax^2+2bx+c}$ peut être ramenée, par un changement de variable, à l'intégrale d'une fonction rationnelle ou à l'intégrale d'une fonction trigonométrique.

Plaçons-nous à ce dernier point de vue, pour rattacher à des notions élémentaires le problème que nous traitons dans ce Chapitre. Soit

$$\int \mathrm{R}(x, y)\, dx \tag{1}$$

une intégrale où $\mathrm{R}(x, y)$ désigne une fonction rationnelle de x et y, y étant lié à x par l'équation

$$y = \sqrt{ax^2 + 2bx + c}. \tag{2}$$

Si l'on fait un changement de variable, en prenant comme nouvelle variable u l'intégrale

$$u = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{y}, \tag{3}$$

l'intégrale proposée (1) devient l'intégrale d'une fonction trigonométrique. Pour le vérifier, écrivons

$$y = \sqrt{-a}\sqrt{-\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{b^2 - ac}{a^2}},$$

et posons

$$x + \frac{b}{a} = z\frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}, \qquad \sqrt{-a} = \lambda,$$

il vient, en choisissant pour x_0 la valeur $-\frac{b}{a}$ qui annule z,

$$\lambda u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}, \qquad z = \sin \lambda u,$$

(4) $$x = -\frac{b}{a} + \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a} \sin \lambda u, \qquad y = \frac{\lambda}{a}\sqrt{b^2 - ac} \cos \lambda u,$$

$$dx = y\, du.$$

Avec cette nouvelle variable u, l'intégrale (1) devient l'intégrale d'une fonction rationnelle de $\sin \lambda u$ et $\cos \lambda u$, intégrale que l'on sait calculer.

En employant un langage géométrique, on peut dire que l'équation (2) représente une conique, et que les formules (4) expriment les coordonnées d'un point de cette conique en fonctions uniformes de u.

147. Intégrales elliptiques. — Considérons une intégrale de la forme

(5) $$\int R(x, y)\, dx,$$

où $R(x, y)$ est une fonction rationnelle des deux variables x et y liées par la relation

(6) $$y = \sqrt{a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4},$$

dans laquelle le polynome sous le radical est du quatrième ou du troisième degré. Une intégrale de ce genre s'appelle une *intégrale elliptique*. Les intégrales elliptiques ont fait l'objet des recherches de Legendre, avant la découverte des fonctions elliptiques par Abel. Pour les calculer, on peut faire un changement de variable en prenant comme nouvelle variable u l'intégrale

(7) $$u = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{y}.$$

Les quantités x et y deviennent alors, comme nous le montrerons, des fonctions elliptiques de u et le calcul de l'intégrale (5)

est ramené au calcul de l'intégrale d'une fonction elliptique, calcul que l'on sait faire à l'aide de la décomposition en éléments simples.

En employant un langage géométrique, on peut dire que les coordonnées x et y d'un point de la courbe (6) s'expriment par des fonctions elliptiques de la variable u, ce qui permet de transformer l'intégrale (5) en l'intégrale d'une fonction elliptique.

148. **Premières réductions de l'intégrale elliptique.** — Dans la fonction rationnelle $R(x, y)$ on peut toujours remplacer les puissances paires de y par les puissances du polynome

$$y^2 = a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4,$$

et ramener cette fonction à la forme

$$\frac{P + Q y}{P_1 + Q_1 y},$$

P, Q, P_1, Q_1 désignant des polynomes en x. Si l'on multiplie et divise par $P_1 - Q_1 y$ en remplaçant encore y^2 par sa valeur, on obtient une expression de la forme

$$R(x) + y R_1(x),$$

où $R(x)$ et $R_1(x)$ sont des fonctions rationnelles de x. L'intégrale I se partage alors en deux parties

$$I = \int R(x)\, dx + \int y R_1(x)\, dx,$$

dont la première s'obtient immédiatement, comme l'intégrale d'une fonction rationnelle. Quant à la seconde nous l'écrirons, en multipliant et divisant l'élément différentiel par y,

$$\int \frac{S(x)}{y}\, dx,$$

$S(x)$ étant une fonction rationnelle de x

$$S(x) = y^2 R_1(x).$$

II. — Forme normale de Legendre. Intégrales de Jacobi.

149. **Forme normale de Legendre.** — On dit qu'une intégrale elliptique est ramenée à la forme normale de Legendre quand la

racine carrée y est de la forme

$$y = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)},$$

où k désigne une constante appelée le *module*. Dans les recherches théoriques, cette constante k a une valeur quelconque réelle ou imaginaire; dans les applications à la Géométrie, à la Physique, à la Mécanique, on peut, comme nous le verrons, la supposer réelle et moindre que l'unité.

La racine carrée y ayant cette forme, voyons comment on peut calculer une intégrale de la forme

$$I = \int \frac{S(x)}{y} dx,$$

à laquelle on peut réduire toute intégrale elliptique, d'après le paragraphe précédent. Actuellement on peut encore, par des procédés algébriques, simplifier cette intégrale, en profitant de ce que y est la racine carrée d'un polynome *bicarré*. La fonction rationnelle $S(x)$ peut toujours s'écrire

$$\mathcal{R}(x^2) + x\,\mathcal{R}_1(x^2),$$

où $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_1$ sont des fonctions rationnelles de x^2. L'intégrale s'écrit alors

$$\int \frac{\mathcal{R}(x^2)\,dx}{y} + \int \frac{x\,\mathcal{R}_1(x^2)\,dx}{y}.$$

La deuxième intégrale se ramène immédiatement à une intégrale élémentaire par la substitution

$$x^2 = z,$$

qui donne l'expression

$$\int \frac{\mathcal{R}_1(z)\,dz}{2\sqrt{(1 - z)(1 - k^2 z)}},$$

où le polynome sous le radical n'est plus que du second degré en z. Finalement, on est donc ramené à l'intégrale

$$\int \frac{\mathcal{R}(x^2)\,dx}{y}, \quad y = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}.$$

Si l'on y fait le changement de variable

$$u = \int_0^x \frac{dx}{y} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad x = \operatorname{sn}(u, k),$$

elle devient

$$\int \mathcal{R}(\operatorname{sn}^2 u)\, du,$$

intégrale d'une fonction elliptique aux périodes $2K$ et $2iK'$. Pour la calculer, il faut décomposer la fonction elliptique en éléments simples, en procédant comme nous avons fait au n° 50 dans une question qui, au fond, est identique à la question actuelle. On décomposera d'abord la fonction rationnelle de x^2, $\mathcal{R}(x^2)$, en fractions simples

$$\mathcal{R}(x^2) = c_0 + c_1 x^2 + \ldots + c_p x^{2p} + \frac{b_1}{x^2} + \frac{b_2}{x^4} + \ldots + \frac{b_m}{x^{2m}}$$
$$+ \sum \left[\frac{A}{x^2 - \alpha} + \frac{A_1}{(x^2-\alpha)^2} + \ldots + \frac{A_{p-1}}{(x^2-\alpha)^p} \right],$$

où nous mettons à part les termes en x et en $\frac{1}{x}$ quand ils existent; la somme Σ est alors relative aux racines α qui sont différentes de zéro.

Faisant ensuite $x = \operatorname{sn} u$, on sera ramené à calculer les intégrales des types suivants

$$(8) \qquad \int \operatorname{sn}^2 u\, du, \quad \int \operatorname{sn}^4 u\, du, \quad \ldots, \quad \int \frac{du}{\operatorname{sn}^2 u}, \quad \ldots, \quad \int \operatorname{sn}^{2n} u\, du.$$

où n est un entier positif ou négatif,

$$(9) \qquad \int \frac{du}{\operatorname{sn}^2 u - \alpha}, \quad \int \frac{du}{(\operatorname{sn}^2 u - \alpha)^2}, \quad \ldots, \quad \int \frac{du}{(\operatorname{sn}^2 u - \alpha)^p},$$

où α est différent de zéro. Ces intégrales sont faciles à obtenir par la décomposition en éléments simples.

On peut, par voie récurrente, ramener toutes les intégrales du type (8) à la première de ce type. Quant aux intégrales du type (9), elles se déduisent de la première en la différentiant par rapport à α. De là l'importance particulière des premières intégrales de chaque type. Nous allons les calculer.

150. Intégrales de première, deuxième et troisième espèce, d'après Legendre et Jacobi. — 1° On appelle intégrale de *première espèce* l'intégrale

$$u = \int_0^x \frac{dx}{y} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

2° On appelle intégrale de *deuxième espèce*, l'intégrale

$$k^2 \int_0^x \frac{x^2\,dx}{y},$$

qui devient, quand on y fait $x = \operatorname{sn} u$,

$$k^2 \int_0^u \operatorname{sn}^2 u\,du.$$

Cette intégrale, que Jacobi désigne par $Z(u)$, a pour valeur (n° 100)

$$u\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}.$$

Quand u augmente de $2K$ ou de $2iK'$ l'expression que nous venons de trouver pour l'intégrale de deuxième espèce éprouve des accroissements constants

$$2J = 2K\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}, \qquad 2iJ' = 2iK'\left[\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} + \frac{\pi}{2KK'}\right],$$

que l'on appelle *modules de périodicité de l'intégrale de deuxième espèce*. On en déduit la relation

$$KJ' - JK' = \frac{\pi}{2}.$$

3° On appelle intégrale de *troisième espèce* l'intégrale

$$\int_0^x \frac{dx}{(x^2-\alpha)y},$$

qui devient, quand on y fait $x = \operatorname{sn} u$,

$$\int_0^u \frac{du}{\operatorname{sn}^2 u - \alpha},$$

où α est différent de zéro. Pour la calculer, déterminons un argu-

ment a par la condition

$$\operatorname{sn}^2 a = \alpha,$$

nous aurons à calculer l'intégrale

$$\int_0^u \frac{du}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 a},$$

qui est donnée par la formule suivante établie au n° 100

$$(10) \qquad \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 a} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{H}'(u-a)}{\mathrm{H}(u-a)} - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{H}'(u+a)}{\mathrm{H}(u+a)} + \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)},$$

d'où

$$\int_0^u \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a\, du}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 a} = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{\mathrm{H}(a-u)}{\mathrm{H}(a+u)} + u\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}.$$

Si, dans la formule de décomposition (10) on change u en $u+i\mathrm{K}'$, elle devient, d'après la relation

$$\operatorname{sn}(u+i\mathrm{K}') = \frac{1}{k \operatorname{sn} u}$$

et la formule donnant $\mathrm{H}(u+i\mathrm{K}')$ en fonction de $\Theta(u)$,

$$\frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} = \frac{1}{2}\frac{\Theta'(u-a)}{\Theta(u-a)} - \frac{1}{2}\frac{\Theta'(u+a)}{\Theta(u+a)} + \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}.$$

Pour désigner l'intégrale du premier membre prise de o à u, Jacobi emploie la notation $\Pi(u, a)$:

$$\Pi(u,a) = k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u\, du}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u}$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{\Theta(a-u)}{\Theta(a+u)} + u\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}.$$

4° *Formule récurrente pour le calcul de* $\int \operatorname{sn}^{2n} u\, du$. — En calculant l'expression

$$\frac{d}{du}[\operatorname{sn}^{2n-3} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u],$$

et désignant, pour abréger, par s la fonction $\operatorname{sn} u$, on trouve

$$(2n-3)s^{2n-4}(1-s^2)(1-k^2s^2) - s^{2n-2}(1-k^2s^2) - k^2s^{2n-2}(1-s^2)$$

ou en ordonnant

$$(2n-3)s^{2n-4}-(2n-2)(1+k^2)s^{2n-2}+(2n-1)k^2s^{2n}.$$

En intégrant on a

$$\operatorname{sn}^{2n-3}u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u = (2n-3)\int s^{2n-4}\,du$$
$$-(2n-2)(1+k^2)\int s^{2n-2}\,du+(2n-1)k^2\int s^{2n}\,du,$$

formule qui permet de calculer toutes les intégrales $\int s^{2n}\,du$ (que n soit positif ou négatif) en fonction des deux premières correspondant à $n=0$, et $n=1$.

III. — Réduction a la forme normale de Legendre.

151. **Cas d'un polynome bicarré.** — Soit l'intégrale elliptique

$$\int \frac{S(x)}{y}\,dx,$$

où $S(x)$ est une fonction rationnelle de x, et y la racine carrée d'un polynome bicarré

$$y=\sqrt{Ax^4+2Bx^2+C}.$$

On peut encore écrire, comme dans le paragraphe précédent,

$$S(x)=\mathcal{R}(x^2)+x\,\mathcal{R}_1(x^2),$$

où $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_1$ sont des fonctions rationnelles de x^2. L'intégrale prend alors la forme

$$\int \frac{\mathcal{R}(x^2)}{y}\,dx+\int \frac{x\,\mathcal{R}_1(x^2)}{y}\,dx.$$

La deuxième intégrale devient une intégrale élémentaire par la substitution

$$x^2=z.$$

Il reste donc à calculer l'intégrale

$$I=\int \frac{\mathcal{R}(x^2)\,dx}{y}.$$

Si l'on ne s'astreint pas à n'introduire que des éléments réels, cette intégrale se ramène immédiatement à la forme normale de Legendre. On a, en effet, en décomposant le polynome bicarré en facteurs

$$y = \sqrt{A}\sqrt{(\alpha^2 - x^2)(\beta^2 - x^2)},$$

α et β pouvant être imaginaires. Si l'on fait ensuite

$$x = \alpha z,$$

on a

$$y = \alpha\beta\sqrt{A}\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}, \qquad k = \frac{\alpha}{\beta},$$

et l'intégrale devient

$$I = \frac{1}{\beta\sqrt{A}}\int \frac{\mathcal{R}(\alpha^2 z^2)\,dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}};$$

elle est réduite à la forme normale de Legendre et on la calcule, comme dans le paragraphe précédent, en faisant

$$z = \operatorname{sn}(u, k).$$

Alors on a

$$x = \alpha z = \alpha \operatorname{sn} u, \qquad \sqrt{\alpha^2 - x^2} = \alpha \operatorname{cn} u,$$

$$\sqrt{\beta^2 - x^2} = \beta\sqrt{1 - k^2 z^2} = \beta \operatorname{dn} u,$$

$$y = \alpha\beta\sqrt{A}\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,$$

$$I = \frac{1}{\beta\sqrt{A}}\int \mathcal{R}(\alpha^2 \operatorname{sn}^2 u)\,du.$$

152. **Réduction à la forme normale en quantités réelles, dans le cas d'un polynome bicarré de la forme $A(x^2+\alpha)(x^2+\beta)$; A, α et β étant réels.** — Supposons que l'on ait

$$y = \sqrt{Ax^4 + 2Bx^2 + C},$$

A, B, C étant réels et $B^2 - AC$ positif : on peut alors écrire

$$y = \sqrt{A(x^2 + \alpha)(x^2 + \beta)},$$

α et β étant réels. Plusieurs cas sont à distinguer suivant les signes des quantités A, α et β. Comme on peut toujours, devant le radical, mettre $\sqrt{\pm A}$ en facteur, on a pour y les types suivants où a

et b désignent des quantités réelles

(I) $$y = \sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)},$$

(II) $$y = \sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 - b^2)},$$

(III) $$y = \sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 + b^2)},$$

(IV) $$y = \sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 + b^2)},$$

(V) $$y = \sqrt{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}.$$

Voici, pour chacun de ces types, une substitution réelle propre à ramener l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int \frac{\mathcal{R}(x^2)}{y} dx$$

à la forme canonique de Legendre.

Type I. — Soit

$$y = \sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}, \qquad a^2 > b^2.$$

La quantité y devant être réelle, x^2 est extérieur à l'intervalle a^2, b^2. Deux cas sont à distinguer suivant que x^2 est inférieur à b^2 ou supérieur à a^2.

Premier cas : $x^2 < b^2$. — On fait $x = bz$; et l'on a

$$y = ab\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}, \qquad k^2 = \frac{b^2}{a^2} < 1.$$

Le radical est donc ramené à la forme demandée avec un module réel moindre que l'unité. Faisant ensuite

$$z = \operatorname{sn} u,$$

on a

$$x = b \operatorname{sn} u, \qquad \sqrt{b^2 - x^2} = b \operatorname{cn} u, \qquad \sqrt{a^2 - x^2} = a \operatorname{dn} u,$$

$$y = ab \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,$$

$$\mathrm{I} = \frac{1}{a} \int \mathcal{R}(b^2 \operatorname{sn}^2 u)\, du.$$

Deuxième cas : $x^2 > a^2$. — Posons

$$x = \frac{a}{z}, \qquad z^2 < 1,$$

nous avons

$$y = \frac{a^2}{z^2}\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}, \qquad dx = -\frac{a}{z^2}\, dz, \qquad k^2 = \frac{b^2}{a^2}.$$

Le radical est encore ramené à la forme demandée, et en posant $z = \operatorname{sn} u$, on a

$$x = \frac{a}{\operatorname{sn} u}, \qquad \sqrt{x^2 - a^2} = a\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}, \qquad \sqrt{x^2 - b^2} = a\frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u},$$

$$y = a^2 \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn}^2 u},$$

$$\mathrm{I} = -\frac{1}{a}\int \mathfrak{R}\left(\frac{a^2}{\operatorname{sn}^2 u}\right) du.$$

Type II. — Soit

$$y = \sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 - b^2)}, \qquad a^2 > b^2.$$

Pour que y soit réel, il faut que x^2 soit compris entre a^2 et b^2. Il suffit de faire

$$a^2 - x^2 = x'^2, \qquad x'^2 < a^2 - b^2,$$

pour ramener l'intégrale

$$\int \frac{\mathfrak{R}(x^2)\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 - b^2)}}$$

à l'intégrale

$$-\int \frac{\mathfrak{R}(a^2 - x'^2)\,dx'}{\sqrt{(a^2 - x'^2)(a^2 - b^2 - x'^2)}},$$

qui rentre dans le type I.

Type III. — L'intégrale

$$\int \frac{\mathfrak{R}(x^2)}{\sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 + b^2)}}\,dx, \quad x^2 < a^2$$

se ramène de même au type I par la substitution

$$a^2 - x^2 = x'^2,$$

qui donne l'intégrale

$$-\int \frac{\mathfrak{R}(a^2 - x'^2)}{\sqrt{(a^2 - x'^2)(a^2 + b^2 - x'^2)}}\,dx'.$$

Type IV. — L'intégrale

$$\int \frac{\mathfrak{R}(x^2)}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 + b^2)}}\,dx, \quad x^2 > a^2,$$

pouvant s'écrire

$$\frac{1}{ab}\int\frac{\mathcal{R}(x^2)}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{b^2}\right)}}\frac{dx}{x^2},$$

est du type III si l'on y considère $\frac{1}{x}$ comme la variable. On la ramènera donc au type I par la substitution

$$\frac{1}{a^2}-\frac{1}{x^2}=x'^2.$$

Type V. — Enfin l'intégrale

$$\int\frac{\mathcal{R}(x^2)}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}dx,\quad a^2>b^2$$

se ramène également au type I par la substitution

$$x^2+a^2=x'^2,$$

qui la transforme en

$$\int\frac{\mathcal{R}(x'^2-a^2)\,dx'}{\sqrt{(x'^2-a^2)(x'^2-a^2+b^2)}},\quad x'^2>a^2.$$

153. **Réduction à la forme canonique de Legendre en quantités réelles quand y est la racine carrée d'un polynome du quatrième degré.** — Nous allons montrer que l'on peut toujours, par une substitution réelle, transformer un polynome du quatrième degré à coefficients réels en un polynome bicarré de la forme

$$A(x^2+\alpha)(x^2+\beta),$$

A, α et β étant réels. On sera alors ramené au cas précédent.

On sait qu'un polynome du quatrième degré, à coefficients réels, peut être décomposé, au moins d'une manière, en un produit de facteurs réels du second degré. On peut donc supposer

$$y=\sqrt{C(x^2+2mx+n)(x^2+2\mu x+\nu)},$$

C, m, n, μ, ν étant réels. Faisons $x=\frac{p+qt}{1+t}$, t étant la nouvelle variable, p et q deux constantes. En substituant dans y et réduisant au même dénominateur, nous aurons sous le radical le pro-

duit de deux trinomes en t. Déterminons p et q de façon que ces trinomes ne contiennent pas de termes du premier degré en t : nous aurons les deux équations

$$(11)\qquad \begin{cases} pq + m(p+q) + n = 0, \\ pq + \mu(p+q) + \nu = 0, \end{cases}$$

qui donnent

$$p + q = \frac{n - \nu}{\mu - m}, \qquad pq = \frac{m\nu - n\mu}{\mu - m}.$$

Les quantités p et q sont donc racines d'une équation du second degré; pour qu'elles soient réelles, il faut et il suffit que la quantité

$$\Delta = (n - \nu)^2 - 4(\mu - m)(m\nu - n\mu)$$

soit *positive*. Nous allons vérifier que, si le polynome du quatrième degré en x n'est décomposable que d'une façon en facteurs réels du second degré Δ, est *positif*; et que si cette décomposition est possible de plusieurs façons, on peut toujours la faire de telle manière que Δ soit positif. En effet, appelons a, b, c, d les quatre racines de ce polynome, a et b étant les racines de $x^2 + 2mx + n$, c et d celles de $x^2 + 2\mu x + \nu$. On a

$$2m = -(a+b), \qquad n = ab, \qquad 2\mu = -(c+d), \qquad \nu = cd.$$

Substituant dans Δ, on trouve

$$\Delta = (a-c)(a-d)(b-c)(b-d).$$

Si a, b, c, d sont imaginaires, a et b sont conjugués, c et d aussi; Δ est positif.

Si a et b sont réels, c et d imaginaires conjugués, Δ est positif.

Si les quatre racines sont réelles, on peut décomposer le polynome du quatrième degré en x de trois façons différentes en deux facteurs réels du second degré : supposons qu'on ait fait la décomposition de façon que $a > b > c > d$; alors Δ est positif.

Ainsi, dans tous les cas, après l'introduction de la nouvelle variable t, y prend la forme

$$y = \frac{\sqrt{A(t^2+\alpha)(t^2+\beta)}}{(1+t)^2} \qquad (A, \alpha, \beta \text{ étant réels});$$

et l'intégrale

$$\int \frac{S(x)}{y}\,dx$$

devient

$$(q-p)\int \frac{S\left(\frac{p+qt}{1+t}\right)}{\sqrt{A(t^2+\alpha)(t^2+\beta)}}\,dt.$$

On la ramènera à la forme canonique de Legendre par une des transformations indiquées dans le numéro précédent.

Remarque. — Si l'on considère x comme l'abscisse d'un point sur une droite, la détermination des valeurs de p et q revient à la recherche des abscisses des points qui divisent harmoniquement les deux couples de points ayant pour abscisses les racines des deux trinomes

$$x^2+2mx+n, \quad x^2+2\mu x+\nu.$$

154. **Cas où le polynome sous le radical est du troisième degré.** — Si l'on a une intégrale elliptique

$$\int \frac{S(x)\,dx}{y},$$

avec

$$y=\sqrt{ax^3+3bx^2+3cx+d},$$

on peut encore, par une substitution réelle, ramener cette intégrale à la forme canonique de Legendre. Le polynome sous le radical ayant toujours une racine réelle α, il suffit de faire

$$x-\alpha=t^2,$$

pour être ramené à une intégrale dans laquelle figure la racine carrée d'un polynome *bicarré* en t.

Mais, dans ce cas, il est plus simple d'employer la forme normale de M. Weierstrass, comme on le verra dans le Chapitre suivant.

CHAPITRE VIII.

RÉDUCTION A LA FORME NORMALE DE M. WEIERSTRASS. INVERSION.

I. — Le polynome sous le radical est du troisième degré.

155. **Réduction à la forme normale.** — Soit à calculer l'intégrale $\int \frac{R(x)\,dx}{\sqrt{X}}$, où X est un polynôme du troisième degré

Si nous effectuons dans X la substitution

$$x = mz + n,$$

nous pourrons disposer des constantes m et n de façon que le polynome Z transformé de X soit de la forme

$$Z = 4z^3 - g_2 z - g_3.$$

g_2 et g_3 désignant des coefficients constants. On reconnaît immédiatement qu'il suffit de poser

$$n = -\frac{b}{3a}$$

et

$$am^3 = 4.$$

On voit alors que l'on est ramené à considérer une intégrale

$$I = \int \frac{S(z)\,dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}},$$

$S(z)$ désignant une fonction rationnelle de z. On dit qu'une intégrale de cette forme est de la forme canonique de M. Weierstrass.

Si l'on pose ensuite

$$u = \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}},$$

on en tire, en faisant l'inversion,

$$z = p(u; g_2, g_3),$$

et l'intégrale elliptique I devient

$$I = \int S(pu)\, du,$$

$S(pu)$ étant une fonction rationnelle de pu. On calculera cette intégrale par la méthode de décomposition en éléments simples, comme on l'a expliqué au n° 50.

Les périodes de la fonction pu se calculent d'après les formules du Chapitre VI.

156. **Remarques sur l'inversion.** — Nous avons vu, dès le début de cet Ouvrage, que, si l'on construit la fonction pu avec deux périodes arbitraires 2ω et $2\omega'$ de rapport imaginaire, cette fonction $z = pu$ vérifie une équation de la forme

$$(1) \qquad \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3,$$

g_2 et g_3 étant des constantes définies en fonction des périodes par certaines séries. Inversement, étant donnée une équation de cette forme où g_2 et g_3 ont des valeurs déterminées choisies arbitrairement, on peut toujours construire une fonction $p(u; g_2, g_3)$ vérifiant cette équation. Cela résulte, comme nous l'avons déjà remarqué au n° 34, de ce que la fonction σu est représentée par une série entière en u, g_2, g_3 convergente quelles que soient ces quantités et que la fonction

$$z = pu = \frac{\sigma'^2 u - \sigma u \sigma'' u}{\sigma^2 u}$$

vérifie l'équation (1) quels que soient g_2 et g_3.

Nous allons rappeler comment, g_2 et g_3 ayant des valeurs *réelles* quelconques, on peut calculer une paire de périodes pri-

mitives de pu et vérifier que la fonction pu, construite avec ces périodes, satisfait bien à l'équation (1).

PREMIER CAS : *Discriminant positif.* — Supposons que dans l'équation

$$(1)\qquad \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3,$$

g_2 et g_3 soient réels et que le discriminant du second membre $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ soit positif. Les racines e_1, e_2, e_3 sont réelles.

Déterminons les valeurs ω et ω' par les égalités

$$(2)\qquad \omega = \int_{e_1}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}},$$

$$(3)\qquad \frac{\omega'}{i} = \int_{-e_3}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z + g_3}},$$

de sorte que ω et $\frac{\omega'}{i}$ sont des quantités réelles et positives, et construisons la fonction pu qui admet pour périodes primitives 2ω, $2\omega'$.

Cette fonction pu satisfait à une équation différentielle

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 4z^3 - G_2 z - G_3,$$

dans laquelle G_2 et G_3 ont des valeurs réelles rendant le discriminant $G_2^3 - 27G_3^2$ positif. Il s'agit de démontrer que l'on a

$$G_2 = g_2, \qquad G_3 = g_3.$$

Pour cela, rappelons que les demi-périodes ω et ω' de la fonction pu peuvent se déduire des coefficients de l'équation différentielle vérifiée par cette fonction au moyen des égalités

$$\omega = \int_{E_1}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - G_2 z - G_3}},$$

$$\frac{\omega'}{i} = \int_{-E_3}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - G_2 z + G_3}},$$

en désignant par E_1 la plus grande et par E_3 la plus petite des racines du polynome $4z^3 - G_2 z - G_3$. En comparant ces ex-

pressions de ω et de $\frac{\omega'}{i}$ aux intégrales (2) et (3) qui ont servi de définition à ces quantités, on est conduit aux égalités

$$\int_{e_1}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}} = \int_{E_1}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - G_2 z - G_3}},$$
$$\int_{-e_3}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z + g_3}} = \int_{-E_3}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - G_2 z + G_3}}.$$

Mais, d'après le raisonnement fait au n° **141**, les égalités précédentes exigent que l'on ait

$$E_1 = e_1, \qquad E_2 = e_2, \qquad E_3 = e_3,$$

et, par suite,

$$G_2 = g_2, \qquad G_3 = g_3.$$

Donc l'équation différentielle donnée est vérifiée par la fonction pu qui admet pour périodes primitives 2ω et $2\omega'$, ω et $\frac{\omega'}{i}$ se déduisant des coefficients de l'équation donnée à l'aide des intégrales (2) et (3).

Deuxième cas : *Discriminant négatif.* — Étant *donnée* l'équation différentielle

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3,$$

dans laquelle g_2 et g_3 sont réels, et tels que l'on ait

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 < 0,$$

nous allons construire une fonction pu vérifiant cette équation différentielle.

Soient e_2 la racine réelle, e_1, e_3 les deux racines imaginaires conjuguées de $4z^3 - g_2 z - g_3 = 0$: posons

$$\omega_2 = \int_{e_2}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}},$$
$$\frac{\omega'_2}{i} = \int_{-e_2}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z + g_3}},$$

puis

$$\omega_1 = \frac{\omega_2 - \omega'_2}{2}, \qquad \omega_3 = \frac{\omega_2 + \omega'_2}{2},$$

et construisons la fonction pu qui admet pour périodes primitives $2\omega_1$, $2\omega_3$.

Cette fonction pu satisfait à une équation différentielle

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 4z^3 - G_2 z - G_3;$$

les périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$ étant imaginaires conjuguées, on sait que G_2 et G_3 sont réels et que le polynome $4z^3 - G_2 z - G_3$ admet une seule racine réelle : soient E_2 la racine réelle, E_1, E_3 les racines imaginaires conjuguées de ce polynome ; de plus, on a

$$\omega_2 = \int_{E_2}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - G_2 z - G_3}},$$

$$\frac{\omega_2'}{i} = \int_{-E_2}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - G_2 z + G_3}}.$$

Il s'agit de démontrer que G_2 et G_3 sont égaux respectivement à g_2 et g_3.

D'après ce qui précède, on doit avoir

$$\int_{e_2}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)}} = \int_{E_2}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{(z - E_1)(z - E_2)(z - E_3)}}$$

et

$$\int_{-e_2}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{(z + e_1)(z + e_2)(z + e_3)}} = \int_{-E_2}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{(z + E_1)(z + E_2)(z + E_3)}}.$$

Mais nous avons vu (n° 139) que ces égalités ne peuvent avoir lieu que si E_2, E_1, E_3 sont égaux respectivement à e_2, e_1, e_3 et par suite si l'on a

$$G_2 = g_2, \qquad G_3 = g_3.$$

Donc la fonction pu que nous avons construite avec les périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$ satisfait à l'équation différentielle donnée.

II. — Le polynome sous le radical est du quatrième degré. Premier mode de réduction où l'on ne se préoccupe pas de la réalité.

On a déjà donné n° 132 une méthode pour faire l'inversion de l'intégrale $\int \frac{dz}{\sqrt{F(z)}}$ en se servant des fonctions de Jacobi. Mais,

pour appliquer cette méthode dans le cas général, il faut décomposer $F(z)$ en un produit de deux facteurs du second degré, ce qui conduit à résoudre une équation du troisième degré. Il y a intérêt à éviter cette question auxiliaire, surtout lorsque le polynome du quatrième degré $F(z)$ n'a pas ses coefficients numériques et contient des constantes arbitraires, comme cela se présente souvent dans les problèmes de Mécanique. Cette difficulté se trouve écartée quand on fait l'inversion en se servant des fonctions de M. Weierstrass.

157. Cas particulier. — Parmi les formes diverses que peut prendre la formule d'addition de la fonction pu, nous avons obtenu la suivante (nº 45)

$$pu - p(u+v) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right).$$

Si donc on pose

$$(1) \qquad t = \frac{1}{2}\frac{p'u - p'v}{pu - pv},$$

en regardant v comme une constante et t comme une fonction de u, cette fonction vérifie l'équation différentielle

$$\left(\frac{dt}{du}\right)^2 = [pu - p(u+v)]^2.$$

Nous allons exprimer le second membre en fonction de t et vérifier qu'il est un polynome du quatrième degré en t.

Dans tout ce qui suit nous rendrons les résultats plus faciles à retenir en employant une représentation géométrique.

Considérons la cubique

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3,$$

décrite par le point de coordonnées

$$x = pu, \qquad y = p'u,$$

cubique étudiée aux nºs 58 et suivants. Coupons cette courbe par une sécante passant par un point fixe P de paramètre v et un point variable de paramètre u; le coefficient angulaire de la sécante est

$$a = \frac{p'u - p'v}{pu - pv} = 2t,$$

et le troisième point d'intersection a pour paramètre $-(u+v)$ (nº 60). Nous avons obtenu dans le nº 60 des formules qu'on peut écrire, en y remplaçant a par $2t$,

$$[pu - pv] + [p(u+v) - p(v)] = t^2 - 3pv,$$
$$[pu - pv][p(u+v) - p(v)] = \frac{1}{2}(p''v - 2tp'v);$$

ces identités montrent que $pu - pv$ et $p(u+v) - pv$ sont racines d'une équation du second degré ayant pour coefficients des polynomes en t. En élevant la première au carré et en en retranchant le quadruple de la seconde, on a

$$[pu - p(u+v)]^2 = (t^2 - 3pv)^2 - 2(p''v - 2tp'v),$$

et l'équation différentielle que vérifie t peut s'écrire

$$\left(\frac{dt}{du}\right)^2 = f(t).$$

en posant

$$f(t) = (t^2 - 3pv)^2 - 2(p''v - 2tp'v).$$

Les racines de ce polynome $f(t)$ sont les moitiés des coefficients angulaires des tangentes menées du point P à la cubique; en effet, si t devient égal à une de ces racines, on a $pu = p(u+v)$, et la sécante de coefficient angulaire $2t$ coupe la cubique en deux points confondus.

En résumé, si t est défini en fonction de u par l'équation

$$du = \frac{dt}{\sqrt{f(t)}},$$

t peut s'exprimer en fonction uniforme doublement périodique de u par la formule (1) et il en est de même de $\sqrt{f(t)}$, qui est égale à $\frac{dt}{du}$. On exprime ce résultat en disant qu'on a résolu le problème de l'inversion pour le polynome $f(t)$. Ce polynome du quatrième degré en t ne renferme pas de terme en t^3 et contient trois constantes arbitraires, qui sont l'argument v et les deux invariants g_2 et g_3 de la fonction p.

Nous allons voir que, si le polynome sous le radical est un polynome du quatrième degré quelconque, on peut toujours, après en avoir fait disparaître le terme en t^3, l'identifier avec $f(t)$. Le

cas particulier que nous venons de traiter nous donnera donc la solution du problème de l'inversion pour un polynome du quatrième degré quelconque.

158. **Le cas général ramené au cas particulier précédent.** — Soit un polynome donné du quatrième degré

$$\varphi(t) = t^4 + 6\alpha_2 t^2 + 4\alpha_3 t + \alpha_4,$$

débarrassé du terme en t^3. En l'identifiant avec le polynome $f(t)$ du numéro précédent, on trouve, en vertu de $2\,p''v = 12\,p^2 v - g_2$,

$$pv = -\alpha_2, \qquad p'v = \alpha_3, \qquad g_2 - 3\,p^2 v = \alpha_4.$$

La dernière de ces égalités peut être remplacée par la suivante

$$g_2 = \alpha_4 + 3\alpha_2^2,$$

et l'on voit que les trois constantes pv, $p'v$ et g_2 se trouvent déterminées. La valeur de g_3 peut se déduire de l'équation

$$p'^2 v = 4\,p^3 v - g_2\,pv - g_3;$$

elle est égale à

$$g_3 = \alpha_2\alpha_4 - \alpha_3^2 - \alpha_2^3.$$

On a donc, pour identifier les deux polynomes, les relations concordantes

$$g_2 = \alpha_4 + 3\alpha_2^2, \qquad g_3 = \alpha_2\alpha_4 - \alpha_3^2 - \alpha_2^3,$$
$$pv = -\alpha_2, \qquad p'v = \alpha_3.$$

Ces relations définissent les deux invariants g_2 et g_3 et l'argument constant v.

Si le polynome donné est un polynome $F(z)$ renfermant un terme du troisième degré

$$F(z) = a_0 z^4 + 4a_1 z^3 + 6a_2 z^2 + 4a_3 z + a_4,$$

on fera disparaître le second terme en posant

$$z = t - \frac{a_1}{a_0};$$

on a alors

$$F(z) = a_0(t^4 + 6\alpha_2 t^2 + 4\alpha_3 t + \alpha_4) = a_0\,\varphi(t),$$

où

$$\alpha_2 = \frac{a_0 a_2 - a_1^2}{a_0^2}, \qquad \alpha_3 = \frac{a_3 a_0^2 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3}{a_0^3},$$

$$\alpha_4 = \frac{a_4 a_0^3 - 4 a_0^2 a_1 a_3 + 6 a_0 a_2 a_1^2 - 3 a_1^4}{a_0^4}.$$

On trouve enfin, pour g_2 et g_3, les expressions suivantes

$$g_2 = \quad \alpha_4 + 3\alpha_2^2 \quad = \frac{S}{a_0^2},$$

$$g_3 = \alpha_2 \alpha_4 - \alpha_3^2 - \alpha_2^3 = \frac{T}{a_0^3},$$

en posant

$$S = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2,$$

$$T = a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4.$$

Remarque. — S et T sont les invariants du polynome

$$a_0 z^4 + 4 a_1 z^3 + 6 a_2 z^2 + 4 a_3 z + a_4.$$

Si l'on calcule les valeurs particulières de S et de T pour le polynome

$$f(t) = t^4 - 6t^2 pv + 4 t p'v + g_2 - 3p^2 v,$$

on trouve g_2 et g_3.

On obtiendrait donc immédiatement les relations donnant g_2 et g_3 en égalant les valeurs des invariants des deux polynomes que l'on veut identifier.

Les expressions de pv et de $p'v$ en fonction de a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 s'obtiennent de même en remplaçant α_2, α_3, α_4, par leurs valeurs; on peut alors énoncer la règle suivante :

159. **Règle.** — Soit $F(z)$ un polynome du quatrième degré quelconque

$$F(z) = a_0 z^4 + 4 a_1 z^3 + 6 a_2 z^2 + 4 a_3 z + a_4,$$

et soient S et T les fonctions suivantes des coefficients de ce polynome

$$S = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2,$$

$$T = a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4.$$

Si l'on prend les fonctions elliptiques ayant pour invariants

$$g_2 = \frac{S}{a_0^2}, \qquad g_3 = \frac{T}{a_0^3},$$

et un argument constant v défini par les égalités

$$pv = \frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0^2}, \qquad p'v = \frac{a_3 a_0^2 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3}{a_0^3},$$

et si l'on pose

$$z = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2}\frac{p'u - p'v}{pu - pv},$$

on a

$$\sqrt{F(z)} = \sqrt{a_0}[pu - p(u+v)],$$

puis

$$\frac{1}{\sqrt{a_0}} du = \frac{dz}{\sqrt{F(z)}}, \qquad \frac{u}{\sqrt{a_0}} = \int \frac{dz}{\sqrt{F(z)}},$$

ce qui donne la solution du problème de l'inversion pour le polynome du quatrième degré $F(z)$.

A un point de vue géométrique, ces formules peuvent aussi s'interpréter comme il suit :

Si l'on considère la courbe du quatrième ordre

$$Z = \sqrt{F(z)},$$

les coordonnées Z et z d'un point de cette courbe peuvent s'exprimer en fonctions uniformes du paramètre u par les formules

$$z = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2}\frac{p'u - p'v}{pu - pv},$$

$$Z = \sqrt{a_0}[pu - p(u+v)].$$

III. — Inversion en quantités réelles. Discriminant positif.

160. **Expression elliptique des racines d'un polynome du quatrième degré.** — D'après ce qui précède, étant donné un polynome du quatrième degré

$$F(z) = a_0 z^4 + 4 a_1 z^3 + 6 a_2 z^2 + 4 a_3 z + a_4,$$

si l'on pose

$$z = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2}\frac{p'u - p'v}{pu - pv},$$

les invariants des fonctions elliptiques et l'argument constant v étant convenablement choisis, le polynome $F(z)$ prend la forme

$$F(z) = a_0[pu - p(u+v)]^2.$$

Cette forme permet de trouver simplement les valeurs de l'argument u qui correspondent aux racines de $F(z)$. Pour l'une de ces valeurs, on doit avoir

$$pu - p(u+v) = 0,$$

ou bien

$$u + v = \pm u + 2m\omega + 2n\omega',$$

m et n étant des nombres entiers. On ne doit pas prendre le signe $+$, puisque v n'est pas un multiple des périodes. En prenant le signe $-$, on trouve

$$u = -\frac{v}{2} + m\omega + n\omega',$$

et il suffit de considérer les quatre valeurs suivantes de u :

$$u_0 = -\frac{v}{2}, \qquad u_1 = -\frac{v}{2} + \omega, \qquad u_2 = -\frac{v}{2} + \omega + \omega', \qquad u_3 = -\frac{v}{2} + \omega'.$$

161. **Discussion relative à la réalité des racines. Cas où le discriminant est positif.** — Nous supposerons dans ce qui suit que les coefficients de $F(z)$ sont réels, de sorte que, lorsqu'on fait l'inversion, g_2 et g_3 sont réels. De plus, nous nous limitons pour le moment au cas où le discriminant est positif. La courbe

$$x = pu, \qquad y = p'u$$

se compose d'une ovale et d'une branche infinie. Les valeurs de pv et $p'v$ étant réelles, v est le paramètre d'un point réel de la courbe. L'une des périodes ω est réelle, l'autre ω' purement imaginaire.

Les arguments u_0, u_1, u_2, u_3 sont les paramètres des points de contact des tangentes menées à la cubique $x = pu$, $y = p'u$ par le point de paramètre v; les valeurs correspondantes de

$$t = \frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'v}{pu - pv}$$

sont les demi-coefficients angulaires des quatre tangentes, et l'on

voit, en se reportant à l'expression de z en fonction de u, que le nombre des racines réelles de $F(z)$ est égal au nombre des tangentes réelles qu'on peut mener à la cubique par le point de paramètre v.

Nous avons vu (n° 63) que les quatre tangentes sont ou toutes réelles, ou toutes imaginaires suivant que le point v appartient à la branche infinie ou à l'ovale, c'est-à-dire (n° 63) suivant qu'on a à la fois

$$\wp v > 0, \qquad \wp'' v > 0,$$

ou que l'une au moins de ces inégalités n'est pas vérifiée.

D'après la valeur de $\wp v$ en fonction des coefficients du polynome, on peut énoncer ce résultat ainsi :

Dans le cas du discriminant positif, le polynome $F(z)$ *a ses quatre racines réelles, si l'on a à la fois*

$$a_1^2 - a_0 a_2 > 0, \qquad 12(a_1^2 - a_0 a_2)^2 - S a_0^2 > 0.$$

Si l'une de ces inégalités n'est pas vérifiée, le polynome a ses quatre racines imaginaires.

Les quatre racines rangées par ordre de grandeur. — Désignons par

$$z_0, \quad z_1, \quad z_2, \quad z_3,$$

les valeurs de z et par

$$t_0, \quad t_1, \quad t_2, \quad t_3$$

les valeurs de t qui correspondent aux arguments

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3.$$

Dans le cas où les quatre racines sont réelles, les quatre valeurs de z sont rangées dans le même ordre que les valeurs correspondantes de t.

Or on peut voir sur la figure (*fig.* 20) dans quel ordre sont rangés les coefficients angulaires des quatre tangentes menées du point P de paramètre v, en remarquant que chacune de ces tangentes n'a d'autre point sur la courbe que le point P et son point de contact. En supposant

$$0 < v < \omega,$$

on voit (*fig.* 20) que les valeurs de t sont rangées dans l'ordre

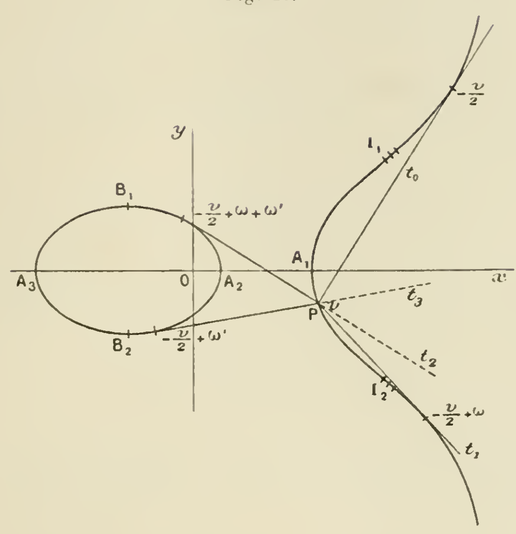
suivant

$$t_0 > t_3 > t_2 > t_1,$$

et, par suite, on a

$$z_0 > z_3 > z_2 > z_1.$$

Fig. 20.



162. **Inversion en quantités réelles.** — Supposons que l'on ait fait l'inversion de l'intégrale

$$\int \frac{dz}{\sqrt{F(z)}},$$

par la méthode des nos 158 et 159. Cherchons quelles valeurs de u l'on doit prendre pour que z et $\sqrt{F(z)}$ soient réels tous les deux.

1° *Cas où les quatre racines sont imaginaires.* — Alors $F(z)$ est toujours du signe de a_0. Si donc a_0 est négatif, $\sqrt{F(z)}$ n'est jamais réel en même temps que z. Si a_0 est positif, il suffit que z soit réel pour que $\sqrt{F(z)}$ le soit, c'est-à-dire que

$$t = \frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'v}{pu - pv}$$

soit réel. Or, puisque les quatre racines sont imaginaires, le

point P, de paramètre v, appartient à l'ovale. Si nous menons par ce point P une sécante de coefficient angulaire $2t$, cette sécante rencontre toujours, quel que soit t, la courbe en un autre point appartenant à l'ovale et en un point appartenant à la branche infinie. En d'autres termes, à une valeur réelle de t correspondent pour u une valeur réelle et une valeur de la forme $a+\omega'$, a étant réel.

Ainsi, quand les quatre racines sont imaginaires, il n'y a de solution que si a_0 est positif; on doit prendre alors u réel ou $u-\omega'$ réel.

2° *Cas où les quatre racines sont réelles.* — Le point de paramètre v est alors sur la branche infinie de la cubique, comme dans la *fig.* 20.

L'argument v peut alors être supposé réel et compris entre $-\omega$ et ω (n° 63).

Nous ferons la discussion en supposant

$$0 < v < \omega,$$

ce qui est d'accord avec la figure, et nous écrirons

$$F(z) = a_0(z-z_0)(z-z_3)(z-z_2)(z-z_1),$$

les racines se succédant dans le produit suivant l'ordre de grandeur décroissante.

Soit d'abord $a_0 > 0$. Comme z est supposé réel, pour que $\sqrt{F(z)}$ le soit, il faut que z vérifie l'une des inégalités suivantes :

$$z > z_0, \qquad z_3 > z > z_2, \qquad z < z_1,$$

ou bien que t vérifie l'une des suivantes

$$t > t_0, \qquad t_3 > t > t_2, \qquad t < t_1.$$

Or le point P se trouve maintenant sur la branche infinie. Si nous menons par P une sécante de coefficient angulaire t et si l'on a

$$t > t_0 \quad \text{ou} \quad t < t_1,$$

les deux points variables d'intersection appartiennent à la branche infinie : les valeurs correspondantes de u sont réelles. Si l'on a

$$t_3 > t > t_2,$$

les deux points variables d'intersection appartiennent à l'ovale et, pour chacun d'eux, $u - \omega'$ est réel. *Ainsi, quand a_0 est positif, on doit prendre u réel ou bien $u - \omega'$ réel.*

Soit maintenant $a_0 < 0$, on doit avoir

$$t_0 > t > t_3 \quad \text{ou} \quad t_2 > t > t_1.$$

Si l'une ou l'autre de ces inégalités est vérifiée, la sécante menée par P et dont le coefficient angulaire est $2t$ ne rencontre plus la courbe; les abscisses des deux points variables d'intersection

$$pu, \quad p(u+v)$$

doivent être imaginaires conjuguées. Or, si nous posons $u = a + bi$, a et b étant réels, la formule d'addition montre que $p(a+bi)$ et $p(a-bi)$ sont imaginaires conjugués; il faut donc que l'on ait

$$p(v + a + bi) = p(a - bi)$$

ou bien

$$v + a + bi = \pm(a - bi) + 2m\omega + 2n\omega',$$

m et n étant des nombres entiers. On ne peut pas prendre le signe $+$, car, en égalant les parties réelles, on trouverait

$$v = 2m\omega,$$

ce qui n'a pas lieu; on doit donc prendre le signe $-$ et l'on a, par suite,

$$v + 2a = 2m\omega + 2n\omega';$$

n doit être nul, puisque v et a sont supposés réels, et l'égalité peut s'écrire

$$a = -\frac{v}{2} + m\omega,$$

où il suffit de considérer pour m les valeurs 0 et 1.

Nous trouvons donc, comme condition nécessaire, que u doit être de l'une des formes suivantes

$$u = -\frac{v}{2} + ib, \qquad u = -\frac{v}{2} + \omega + ib,$$

b étant réel. Nous allons vérifier que cette condition est suffisante.

On voit d'abord que, si u a l'une des formes précédentes, t est

réel. En effet, on a, d'après l'interprétation géométrique de t, comme demi-coefficient angulaire de la sécante,

$$t = \frac{1}{2}\frac{p'u - p'u_1}{pu - pu_1}, \qquad u_1 = -(u+v).$$

Si

$$u = -\frac{v}{2} + ib,$$

$$u_1 = -\left(\frac{v}{2} + ib\right) = -\frac{v}{2} - ib;$$

u et u_1 sont imaginaires conjugués; il en est de même de pu et de pu_1, puis de $p'u$ et de $p'u_1$: donc t est réel. Si

$$u = -\frac{v}{2} + \omega + ib,$$

$$u_1 = -\left(\frac{v}{2} + \omega + ib\right),$$

$$u_1 + 2\omega = -\frac{v}{2} + \omega - ib.$$

Donc pu et pu_1 d'une part, $p'u$ et $p'u_1$, d'autre part, sont imaginaires conjugués, t est encore réel. Dans les deux cas, la sécante de coefficient angulaire $2t$, menée par P, rencontre la cubique en deux points imaginaires. Il faut donc que l'on ait

$$t_0 > t > t_3 \quad \text{ou} \quad t_2 > t > t_1.$$

Donc enfin, pour une valeur de u de l'une des deux formes considérées, z et $\sqrt{F(z)}$ sont réels tous les deux.

Ainsi, dans le cas où les quatre racines sont réelles et où a_0 *est négatif, on doit prendre* $u + \frac{v}{2}$ *ou bien* $u + \frac{v}{2} - \omega$ *purement imaginaire.*

La démonstration a été faite en supposant $0 < v < \omega$. Le résultat est encore vrai si v est compris entre 0 et $-\omega$.

163. **Résumé.** — Le discriminant étant positif, si l'on veut que z et $\sqrt{F(z)}$ soient réels tous les deux, la forme de l'argument u est donnée par la règle suivante :

1° *Les quatre racines de* $F(z)$ *sont imaginaires.* — Si a_0 est

positif, on doit prendre u réel ou bien $u - \omega'$ réel; si a_0 est négatif il n'y a pas de solution.

2° *Les quatre racines de* F(z) *sont réelles.* — Si a_0 est positif, on doit prendre u réel ou bien $u - \omega'$ réel. Si a_0 est négatif, on doit prendre $u + \frac{v}{2}$ ou bien $u + \frac{v}{2} - \omega$ purement imaginaire.

Ces cas 1° et 2° sont les seuls qui peuvent se présenter quand le discriminant est positif.

IV. — Inversion en quantités réelles. Discriminant négatif.

164. Racines de F(z). — Soit, comme précédemment, le polynome du quatrième degré à coefficients réels

$$F(z) = a_0 z^4 + 4 a_1 z^3 + 6 a_2 z^2 + 4 a_3 z + a_4.$$

Les quantités g_2 et g_3 étant calculées comme plus haut en fonction des coefficients de ce polynome, nous supposons maintenant le discriminant $g_2^3 - 27 g_3^2$ *négatif*.

Nous désignerons, comme au n° 132, par ω_1 et ω_3 un couple de périodes primitives de la fonction p, périodes que l'on peut supposer actuellement *imaginaires* conjuguées

$$2\omega_1 = \omega_2 - \omega'_2, \qquad 2\omega_3 = \omega_2 + \omega'_2,$$

ω_2 désignant une quantité réelle et ω'_2 une quantité purement imaginaire.

On voit immédiatement, comme au n° 160, que, si l'on pose

$$z = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2} \frac{p'u - p'v}{pu - pv},$$

les invariants de la fonction p et l'argument constant v étant convenablement choisis, les racines du polynome F(z) correspondent aux arguments

$$u_0 = -\frac{v}{2}, \qquad u_1 = -\frac{v}{2} + \omega_1, \qquad u_2 = -\frac{v}{2} + \omega_1 + \omega_3, \qquad u_3 = -\frac{v}{2} + \omega_3.$$

Nous supposons que les coefficients de F(z) sont réels; alors les quantités qui ont servi à définir pv et $p'v$ sont réelles, et l'on peut toujours supposer v réel et compris entre $-\omega_2$ et ω_2.

On voit donc que $F(z)$ a deux racines réelles correspondant aux arguments

$$u_0 = -\frac{v}{2}, \qquad u_2 = -\frac{v}{2} + \omega_2,$$

et deux racines imaginaires conjuguées correspondant aux arguments

$$u_1 = \frac{-v + \omega_2 - \omega'_2}{2}, \qquad u_3 = \frac{-v + \omega_2 + \omega'_2}{2}.$$

Si l'on considère la courbe

$$x = pu, \qquad y = p'u,$$

précédemment étudiée (n° 142), on sait que cette courbe n'a pas de points réels en dehors de la branche infinie représentée sur la *fig.* 19. Le point P de paramètre v est un point de cette branche.

Par ce point on peut mener à la courbe deux tangentes réelles. Les demi-coefficients angulaires de ces tangentes sont les valeurs que prend le rapport

$$t = \frac{1}{2}\frac{p'u - p'v}{pu - pv},$$

pour $u = u_0$ et $u = u_2$, valeurs que nous désignerons par t_0 et t_2.

Dans la discussion qui va suivre nous supposerons

$$0 < v < \omega_2;$$

on voit alors sur la *fig.* 19 que l'on a

$$t_0 > t_2$$

et l'on en conclut

$$z_0 > z_2.$$

165. **Inversion en quantités réelles.** — Cherchons quelles valeurs de u il faut prendre pour que z et $\sqrt{F(z)}$ soient réels tous les deux. Comme on a

$$F(z) = a_0(z - z_0)(z - z_2)(z - z_1)(z - z_3),$$

et que z_1 et z_3 sont imaginaires conjugués, il suffit, si z est déjà réel, que l'on ait

$$a_0(z - z_0)(z - z_2) > 0.$$

1° Supposons d'abord que a_0 est positif : il faut que z vérifie

l'une des inégalités

$$z > z_0 \quad \text{ou} \quad z < z_2$$

et par suite que t vérifie l'une des inégalités

$$t > t_0 \quad \text{ou} \quad t < t_2;$$

une sécante, menée par P et dont le coefficient angulaire est égal à $2t$, rencontre alors la courbe en deux points réels.

Donc *si a_0 est positif, on doit prendre u réel.*

2° Supposons maintenant que a_0 est négatif; t doit vérifier la double inégalité

$$t_2 < t < t_0;$$

la sécante, menée par P et dont le coefficient angulaire est égal à $2t$, ne rencontre plus la courbe. Les abscisses des points variables d'intersection

$$pu, \quad p(u+v)$$

doivent être imaginaires conjuguées. C'est cette condition qui, dans le cas actuel, va nous déterminer la forme de u.

Posons $u = a + bi$, a et b étant réels $p(a+bi)$ et $p(a-bi)$ sont des quantités imaginaires conjuguées : on le vérifie à l'aide de la formule d'addition. On doit donc avoir

$$p(v + a + bi) = p(a - bi)$$

et, par suite,

$$v + a + bi = \pm(a - bi) + 2m\omega_1 + 2n\omega_3.$$

Prenons d'abord le signe $-$; l'égalité devient

$$\begin{aligned} 2a + v &= 2m\omega_1 + 2n\omega_3 \\ &= m(\omega_2 - \omega_2') + n(\omega_2 + \omega_2'). \end{aligned}$$

Comme a et v sont réels, on doit avoir $n = m$, et l'égalité résolue par rapport à a devient

$$a = -\frac{v}{2} + m\omega_2;$$

il suffit de donner à m les valeurs 0 et 1. Pour $m = 0$, $u + \frac{v}{2}$ est purement imaginaire. Pour $m = 1$, $u + \frac{v}{2}$ est égal à une quantité

purement imaginaire augmentée de ω_2. Mais ce cas rentre dans le précédent si l'on remarque que (nº 135)

$$p(\omega_2 + u) = p(\omega_2' + u).$$

Réciproquement il est facile de vérifier que, pour un argument u de la forme

$$u = -\frac{v}{2} + ib,$$

où b désigne un nombre réel, t est réel et compris entre t_0 et t_2. En effet, puisque $2t$ est le coefficient angulaire de la sécante allant du point P dont le paramètre est v au point dont le paramètre est u, on a

$$t = \frac{1}{2}\frac{p'u - p'u_1}{pu - pu_1}, \qquad u_1 = -(u+v).$$

Si l'on prend

$$u = -\frac{v}{2} + ib,$$

on a

$$u_1 = -\left(\frac{v}{2} + ib\right) = -\frac{v}{2} - ib,$$

et l'on voit que pu et pu_1 d'une part, $p'u$ et $p'u_1$ d'autre part, sont des quantités imaginaires conjuguées. Donc t est réel. De plus la sécante menée par P et de coefficient angulaire $2t$, rencontrant encore la courbe en deux points dont les abscisses sont des quantités imaginaires, t est nécessairement compris entre t_0 et t_2. Donc à une valeur de u de la forme considérée correspondent des valeurs réelles de z et de $\sqrt{F(z)}$.

Nous avons choisi le signe — dans l'égalité exprimant que pu et $p(u+v)$ sont imaginaires conjuguées. En choisissant le signe + dans la même égalité, on serait conduit à des arguments pour lesquels pu et $p(u+v)$ seraient bien encore des quantités imaginaires conjuguées, mais ne rendant pas réels z et $\sqrt{F(z)}$.

Ainsi, quand a_0 est négatif, il faut prendre $u + \frac{v}{2}$ purement imaginaire.

166. **Résumé.** — Pour que z et $\sqrt{F(z)}$ soient réels tous les deux :

Quand a_0 est positif, il faut prendre u réel ;

Quand a_0 est négatif, il faut prendre $u + \frac{\omega'}{2}$ purement imaginaire.

V. — Méthode de M. Hermite.

167. **Méthode générale.** — M. Hermite a donné le moyen de ramener à la forme canonique adoptée par M. Weierstrass une intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ dans laquelle X désigne un polynome général du quatrième degré. Nous indiquerons, à titre d'exercice, cette méthode dont nous n'aurons pas à faire usage. Soit

$$X = a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4$$

un polynome et H le hessien de ce polynome,

$$\begin{aligned} H = &(a_0 a_2 - a_1^2) x^4 + 2(a_0 a_3 - a_1 a_2) x^3 \\ &+ (a_0 a_4 + 2 a_1 a_3 - 3 a_2^2) x^2 + 2(a_1 a_4 - a_2 a_3) x + a_2 a_4 - a_3^2. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\xi = -\frac{H}{X},$$

on aura

$$2 \int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \int \frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3 - S\xi - T}},$$

S et T désignant les invariants du polynome X

$$\begin{aligned} S &= a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2, \\ T &= a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4, \end{aligned}$$

Pour s'en assurer, il suffit de substituer ξ dans l'intégrale du deuxième membre et d'admettre l'identité suivante, facile à vérifier quand le polynome X est bicarré,

$$X^3 \left[4\left(-\frac{H}{X}\right)^3 - S\left(-\frac{H}{X}\right) - T \right] = 4 J^2,$$

en désignant par $4J$ le jacobien des polynomes X et H

$$4 J = X \frac{\partial H}{\partial x} - H \frac{\partial X}{\partial x}.$$

Cas particulier. — Ainsi on vérifiera aisément que l'on a

$$4\int\frac{dx}{\sqrt{x^4+6mx^2+1}}=\int\frac{d\xi}{\sqrt{(\xi+m)\left(\xi-\frac{m-1}{2}\right)\left(\xi-\frac{m+1}{2}\right)}},$$

en posant

$$\xi=-\frac{m(x^4+1)+(1-3m^2)x^2}{x^4+6mx^2+1}=-\frac{H}{X}.$$

Cela résulte des identités

$$(H-mX)\left(H+\frac{m-1}{2}X\right)\left(H+\frac{m+1}{2}X\right)$$
$$=-\frac{(9m^2-1)^2}{4}[x(x^2+1)(x^2-1)]^2,$$

$$\frac{1}{4}\left(X\frac{\partial H}{\partial x}-H\frac{\partial X}{\partial x}\right)=\frac{9m^2-1}{2}x(x^2+1)(x^2-1).$$

CHAPITRE IX.

APPLICATIONS DIVERSES TRAITÉES AVEC LA NOTATION DE M. WEIERSTRASS.

I. — Courbe élastique plane et sans pression.

168. **Mise en équations.** — Nous avons déjà traité cette question au n° 126 à l'aide des fonctions de Jacobi; nous allons la reprendre en nous servant des fonctions de M. Weierstrass et nous en préparerons l'application au cas du prisme droit chargé debout. On pourra, de cette façon, comparer les deux systèmes de notations en les appliquant à un même exemple.

L'équation qui donne la forme de la courbe élastique dans la position d'équilibre contraint et qui a été obtenue au n° 126 peut s'écrire avec un changement de notation

$$(1)\qquad \frac{1}{\rho} = 2C\frac{y}{a^2},$$

C désignant un coefficient positif et a la mesure d'une longueur que nous laisserons arbitraire. Ces constantes sont liées à la constante c employée au n° 126 par la relation

$$\frac{C}{a^2} = \frac{1}{c^2}.$$

On trouvera, à la page suivante, un Tableau de formules que l'on passera à une première lecture : ce Tableau donne le résumé des formules établies dans ce paragraphe.

TABLEAU DE FORMULES. (*Courbe élastique plane et sans pression.*)

(1) $$\frac{1}{\rho} = 2C\frac{y}{a^2},$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\sin\theta\frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{\rho}\sin\theta,$$

(2) $$\frac{dx}{ds} = C\frac{y^2}{a^2} + D,$$

(3) $$\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1 - \left(C\frac{y^2}{a^2} + D\right)^2,$$

(4) $$\frac{y}{a} = -\frac{1}{2}\frac{\wp' u}{\wp u - e_2},$$

(5) $$(\wp u - e_2)[\wp(u + \omega_2) - e_2] = (e_1 - e_2)(e_3 - e_2),$$

(6) $$(\wp u - e_2) + [\wp(u + \omega_2) - e_2] = \frac{y^2}{a^2} - 3e_2,$$

(7) $$\left(\frac{y^2}{a^2} - 3e_2\right)^2 - 4(e_2 - e_1)(e_2 - e_3) = [\wp(u + \omega_2) - \wp u]^2 = \frac{1}{a^2}\left(\frac{dy}{du}\right)^2,$$

(8) $$\left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{D}{C}\right)^2 - \frac{1}{C^2} = -\frac{1}{C^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2,$$

(9) $$a\,du = Ci\,ds,$$

(10) et (11) $$\frac{i}{a}\frac{dx}{du} = \frac{y^2}{a^2} - 3e_2 = \wp u + \wp(u + \omega_2) - 2e_2,$$

(12) $$\frac{x}{a} = i[\zeta u + \zeta(u + \omega_2) + 2ue_2] + \text{const.},$$

(13) $$u = -\frac{\omega_2}{2} + it,$$

(14) $$a\,dt = C\,ds,$$

(15) $$\frac{x}{a} = i\left[\zeta\left(\frac{\omega_2}{2} + it\right) - \zeta\left(\frac{\omega_2}{2} - it\right)\right] - 2e_2 t,$$

(16) $$\frac{y}{a} = -\frac{1}{2}\frac{\wp'\left(-\frac{\omega_2}{2} + it\right)}{\wp\left(-\frac{\omega_2}{2} + it\right) - \wp\omega_2},$$

(17) $$\frac{y - y_0}{a} = \frac{1}{2}\frac{\wp'\frac{\omega_2}{2}}{\wp(it) - \wp\frac{\omega_2}{2}}.$$

169. Intégration par les fonctions elliptiques. — La relation (1) peut être considérée comme une équation différentielle du second ordre de la courbe. Nous allons intégrer cette équation. En désignant par s l'arc de la courbe compté à partir d'une origine fixe et par θ l'angle de Ox avec la tangente supposée menée dans le sens qui correspond aux arcs croissants (*fig.* 14, p. 184), on a

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta, \qquad \frac{dy}{ds} = -\sin\theta.$$

De la première égalité l'on déduit, par différentiation,

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\sin\theta\frac{d\theta}{ds},$$

puis, en remplaçant $\sin\theta$ et $\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho}$ par leurs valeurs,

$$\frac{d^2x}{ds^2} = 2\frac{C}{a^2}y\frac{dy}{ds}.$$

Intégrons, ce qui donne

$$(2) \qquad \frac{dx}{ds} = C\frac{y^2}{a^2} + D,$$

D désignant une nouvelle constante, et portons l'expression ainsi obtenue de $\frac{dx}{ds}$ dans la relation

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1 - \left(\frac{dx}{ds}\right)^2,$$

il vient

$$(3) \qquad \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1 - \left(C\frac{y^2}{a^2} + D\right)^2.$$

170. Inversion. — En remarquant que le polynome du quatrième degré dont on veut faire l'inversion est bicarré, on est conduit à appliquer de la façon suivante la méthode donnée au n° 157.

Posons, en adoptant les notations du Chap. VI, § 1,

$$(4) \qquad \frac{y}{a} = -\frac{1}{2}\frac{p'u}{pu - e_2};$$

on sait que l'on a

$$(5) \qquad (pu - e_2)[p(u + \omega_2) - e_2] = (e_2 - e_1)(e_2 - e_3),$$

$$(6) \qquad (pu - e_2) + [p(u + \omega_2) - e_2] = \frac{y^2}{a^2} - 3e_2$$

et, par suite,

$$(7)\quad \left(\frac{y^2}{a^2}-3e_2\right)^2-4(e_2-e_1)(e_2-e_3)=[p(u+\omega_2)-pu]^2=\frac{1}{a^2}\left(\frac{dy}{du}\right)^2.$$

Pour identifier le polynome du quatrième degré qui forme le premier membre de cette égalité avec le second membre de l'égalité (3), nous mettrons cette égalité (3) sous la forme

$$(8)\qquad \left(\frac{y^2}{a^2}+\frac{D}{C}\right)^2-\frac{1}{C^2}=-\frac{1}{C^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2,$$

et il nous suffira ensuite de poser

$$\frac{1}{C^2}=4(e_2-e_1)(e_2-e_3),$$

$$\frac{D}{C}=-3e_2=e_1-e_2+e_3-e_2.$$

On voit que e_1-e_2 et e_3-e_2 sont les racines d'une équation du second degré dont le discriminant est

$$\frac{1}{C^2}(D^2-1).$$

Nous nous bornerons dans tout ce qui suit au cas de $D^2<1$. On reconnaît aisément que cette inégalité doit être vérifiée si la courbe présente un point d'inflexion, comme cela a lieu pour le prisme droit chargé debout : en effet, pour que ρ puisse devenir infini, il faut que y puisse s'annuler sans que $\frac{dy}{ds}$ devienne imaginaire, c'est-à-dire, d'après (8), que D^2-1 soit négatif. Cette hypothèse correspond au premier cas du n° 126. Alors, e_2 étant réel, e_1 et e_3 sont imaginaires conjugués; on peut prendre, comme périodes primitives de la fonction pu, deux quantités imaginaires conjuguées : nous les désignons par ω_1 et ω_3 et nous conservons les notations du § I, Chap. VI.

Ayant ainsi identifié les premiers membres des égalités (7) et (8), nous avons

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{dy}{du}\right)^2=-\frac{1}{C^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2$$

et par suite

$$(9)\qquad a\,du=C\,i\,ds,$$

en supposant convenablement choisi le sens dans lequel l'arc s est compté.

Dans l'égalité (2) remplaçons ds par $\frac{a}{Ci}du$ et $\frac{D}{C}$ par sa valeur $-3e_2$, il vient

$$\frac{i}{a}\frac{dr}{du} = \frac{y^2}{a^2} - 3e_2 \tag{10}$$

et, en tenant compte de la relation (6),

$$\frac{i}{a}\frac{dx}{du} = pu - p(u+\omega_2) - 2e_2. \tag{11}$$

On a immédiatement l'intégrale du second membre et l'on trouve

$$\frac{x}{a} = i[\zeta u + \zeta(u+\omega_2) + 2ue_2] + \text{const.} \tag{12}$$

171. Nature de l'argument. — Voyons comment doit varier u pour que y et $\sqrt{1-\left(C\frac{y^2}{a^2}+D\right)^2}$ soient tous les deux réels.

La relation déjà établie

$$a\,du = C\,i\,ds$$

montre que u est nécessairement imaginaire. Posons

$$u = h + it,$$

h et t désignant des quantités réelles.

On a trouvé, en faisant l'inversion,

$$1-\left(C\frac{y^2}{a^2}+D\right)^2 = -\frac{C^2}{a^2}\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = -C^2[pu - p(u+\omega_2)]^2,$$

et il en résulte

$$\sqrt{1-\left(C\frac{y^2}{a^2}+D\right)^2} = iC[p(h+it) - p(\omega_2+h+it)].$$

D'après cela, $p(\omega_2+h+it)$ doit être la quantité imaginaire conjuguée de $p(h+it)$, on doit donc avoir

$$p(\omega_2+h-it) = p(h-it)$$

et par suite

$$\omega_2 + h + it = \pm(h-it) + 2m\omega_1 + 2n\omega_3,$$

m et n désignant des nombres entiers. Si l'on prenait le signe $+$, h disparaîtrait et t ne pourrait varier d'une manière continue. En prenant le signe $-$, l'égalité devient

$$2h + \omega_2 = m(\omega_2 - \omega'_2) + n(\omega_2 + \omega'_2):$$

le premier membre étant réel, il faut que $n = m$ et l'on trouve alors

$$h = -\frac{\omega_2}{2} + m\omega_2.$$

Il suffit de donner à m les valeurs 0 et 1. Pour $m = 0$, $u + \frac{\omega_2}{2}$ est purement imaginaire. Pour $m = 1$, $u + \frac{\omega_2}{2}$ n'est plus purement imaginaire; mais ce cas se ramène au précédent, à cause de la formule

$$p(u + \omega_2) = p(u + \omega'_2).$$

On aura donc, en résumé, à prendre pour u des valeurs de la forme

$$(13) \qquad u = -\frac{\omega_2}{2} + it,$$

t étant une variable réelle.

Remarquons de suite que l'égalité

$$a\,du = C\,i\,ds$$

devient

$$(14) \qquad a\,dt = C\,ds.$$

172. Expressions de x et de y. — Remplaçons u par sa valeur en fonction de t dans les relations (12) et (4); il vient

$$(15) \qquad \frac{x}{a} = i\left[\zeta\left(\frac{\omega_2}{2} + it\right) - \zeta\left(\frac{\omega_2}{2} - it\right)\right] - 2e_2 t,$$

en supposant l'axe des y choisi de façon que $x = 0$ pour $t = 0$, puis

$$(16) \qquad \frac{y}{a} = -\frac{p'\left(-\frac{\omega_2}{2} + it\right)}{p\left(-\frac{\omega_2}{2} + it\right) - p\omega_2}.$$

Cette valeur de y peut s'écrire successivement en se servant des

relations (65) et (64) du n° 44

$$\frac{y}{a} = \zeta\left(it - \frac{\omega_2}{2}\right) - \zeta\left(it + \frac{\omega_2}{2}\right) + A,$$

(17) $$\frac{y - y_0}{a} = \frac{p'\frac{\omega_2}{2}}{p(it) - p\frac{\omega_2}{2}},$$

A, y_0 désignant des constantes et y_0 étant la valeur que prend y pour $t = 0$.

173. Intervalle dans lequel il suffit de faire varier t. — En tenant compte de la périodicité des fonctions de t qui figurent dans les expressions de x et de y, cherchons dans quel intervalle il suffit de faire varier la variable réelle t.

Quand on change t en $t + \frac{2\omega'_2}{i}$, y ne change pas, x augmente de la quantité constante $4h$ définie par l'égalité

(18) $$\frac{h}{a} = i(\eta'_2 + e_2\omega'_2) = i(\eta_3 - \eta_1 + e_2\omega'_2),$$

où l'on a posé

$$\eta_1 = \zeta(\omega_1), \qquad \eta_3 = \zeta(\omega_3).$$

Il suffit de faire varier t de t_0 à $t_0 + \frac{2\omega'_2}{i}$. Si l'on change t en $-t$, y ne change pas, x change de signe. Donc si l'on faisait varier t de $-\frac{\omega'_2}{i}$ à $+\frac{\omega'_2}{i}$, la branche de courbe ainsi obtenue serait symétrique par rapport à Oy; il suffit de faire varier t de 0 à $\frac{\omega'_2}{i}$.

On peut encore restreindre cet intervalle; soient t_1 et t_2 deux valeurs de t ayant pour demi-somme $\frac{\omega'_2}{2i}$

$$t_1 = \frac{\omega'_2}{2i} + \tau, \qquad t_2 = \frac{\omega'_2}{2i} - \tau;$$

soient x_1, y_1 et x_2, y_2 les coordonnées des points correspondants, on a

$$y_1 + y_2 = 0, \qquad \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = h.$$

h étant la constante définie par l'égalité (18). Donc, si l'on faisait varier t de o à $\frac{\omega'_2}{i}$, la branche de courbe ainsi obtenue aurait pour centre le point $y = 0$, $x = h$: il suffit de faire varier t de o à $\frac{\omega'_2}{2i}$.

Considérons les points de la courbe qui correspondent aux valeurs extrêmes de cet intervalle $\left(0, \frac{\omega'_2}{2i}\right)$. Pour $t = \frac{\omega'_2}{2i}$ on a $y = 0$ d'après la formule (16) et

$$\frac{x}{a} = i(\zeta\omega_3 - \zeta\omega_1 + \omega'_2 e_2) = \frac{h}{a},$$

d'après la formule (15). Ce point $y = 0$, $x = h$ est le centre dont nous venons de constater l'existence. Ce point est en même temps un point d'inflexion, comme cela résulte de la formule

$$\frac{1}{\rho} = 2\frac{Cy}{a^2}.$$

Pour $t = 0$, on a $x = 0$ et $y = y_0$. Cherchons la tangente au point correspondant de la courbe. Si l'on fait $u = -\frac{\omega_2}{2} + it$ dans les égalités (7) et (11), elles deviennent

$$(19) \qquad \frac{1}{a}\frac{dy}{dt} = i\left[p\left(\frac{\omega_2}{2} - it\right) - p\left(\frac{\omega_2}{2} + it\right)\right],$$

$$(20) \qquad \frac{1}{a}\frac{dx}{dt} = p\left(-\frac{\omega_2}{2} + it\right) + p\left(\frac{\omega_2}{2} + it\right) - 2e_2 = y^2 - 3e_2.$$

On voit que, pour $t = 0$, $\frac{dy}{dt}$ est nul et $\frac{dx}{dt}$ est égal à $2\left(p\frac{\omega_2}{2} - p\omega_2\right)$, quantité plus grande que zéro. Donc la tangente est parallèle à Ox, c'est-à-dire à la direction de la force élastique ; de plus, comme Oy est un axe de symétrie, le point correspondant à $t = 0$ est un sommet.

174. **Construction de la courbe.** — Supposons maintenant que t croît de o à $\frac{\omega'_2}{2i}$. A cause de l'égalité

$$C\,ds = a\,dt,$$

s va constamment en croissant. L'égalité

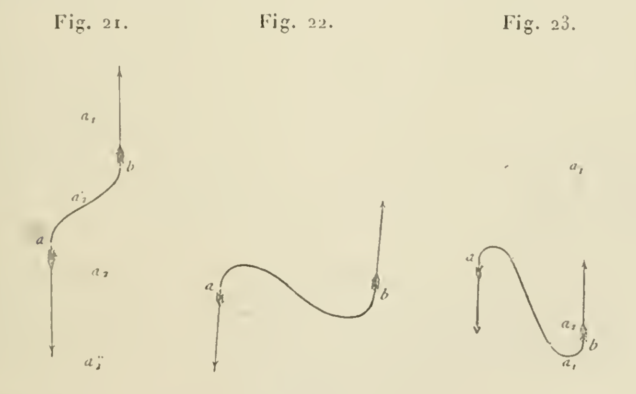
$$\frac{y - y_0}{a} = \frac{p'\frac{\omega_2}{2}}{p(it) - p\frac{\omega_2}{2}}$$

montre que y va sans cesse en décroissant; nous avons déjà remarqué que y part de y_0 pour arriver à zéro; il en résulte que y_0 est positif et que la valeur absolue de y décroît constamment.

Pour voir comment varie x reportons-nous à l'égalité (20) qui donne la valeur de $\frac{dx}{dt}\cdot$ Puisque la valeur absolue de y va sans cesse en décroissant, il en est de même de $\frac{dx}{dt}\cdot$ Pour $t = 0$, la valeur de $\frac{dx}{dt}$ est positive; pour $t = \frac{\omega'_2}{2i}$, y étant nul, $\frac{dx}{dt}$ est égal à $-3e_2$. Donc si l'on a $e_2 < 0$, $\frac{dx}{dt}$ est constamment positive, si l'on a $e_2 > 0$, $\frac{dx}{dt}$ décroît constamment depuis une valeur positive jusqu'à une valeur négative et change une fois de signe dans l'intervalle $\left(0, \frac{\omega'_2}{2i}\right)\cdot$ En faisant varier t au dehors de cet intervalle, on a des arcs de courbes se déduisant du précédent par symétrie par rapport à Oy et par rapport à des centres situés sur Ox ayant pour abscisses $\pm h$, $\pm 2h$, ..., $\pm nh$.

Nous pouvons maintenant reconnaître la forme de la courbe en supposant successivement que e_2 est négatif, nul ou positif.

Fig. 21. Fig. 22. Fig. 23.



Ces trois cas conduisent aux formes des *fig.* 21, 22 et 23. Dans

la *fig.* 14 (I), p. 184, on a représenté seulement un arc tel que l'arc $a'_1 b a_1$ de la *fig.* 21. Dans ces nouvelles figures nous supposons l'axe Oy horizontal.

II. — Prisme droit chargé debout.

175. **Énoncé de la question.** — Une verge élastique droite, dans son état naturel, est encastrée verticalement à l'une de ses extrémités M_0. L'autre extrémité M_1 supporte un poids P. On demande la forme de la verge élastique dans la position d'équilibre.

Ce problème est un cas particulier du précédent. Dans le cas actuel, il n'y a pas de couple appliqué en M_1 : le moment fléchissant en ce point, $\frac{B}{\rho}$ est donc nul, ρ est infini; le point M_1 est un point d'inflexion. Au même point M_1 la force élastique est directement opposée au poids P : elle est donc verticale et dirigée de bas en haut. En M_0, d'après la façon dont la tige est supposée encastrée, la tangente est verticale, et par suite parallèle à la force élastique. D'après ce que nous avons vu n° 173, le point M_0 est un sommet tel que a (*fig.* 21, 22, 23).

On pourra donc prendre les valeurs suivantes du paramètre t :

$$t = 0, \qquad \text{pour le point } M_0,$$
$$t = (2n+1)\frac{\omega'_2}{2i}, \qquad \text{pour le point } M_1,$$

n désignant un nombre entier et positif. Soit l la longueur de l'arc M_0M_1; puisque $ds = \frac{a}{C}dt$, on devra avoir

$$(1) \qquad \frac{l}{a} = \frac{2n+1}{C}\,\frac{\omega'_2}{2i}.$$

Écrivons maintenant que la force élastique est égale et directement opposée au poids P et rappelons-nous que, en mettant le problème en équation, nous avons posé (n° 126)

$$\frac{1}{c^2} = \frac{2C}{a^2} = \frac{T}{B}.$$

Nous trouvons comme nouvelle condition

$$(2) \qquad P = \frac{2BC}{a^2},$$

car T, qui est constant tout le long de la fibre moyenne du prisme, est ici égale à P.

176. Nombre de solutions. — Entre les deux égalités (1) et (2) éliminons a et remplaçons C par sa valeur

$$\frac{1}{C} = 2\sqrt{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)},$$

nous trouvons la condition

$$(3) \qquad Pl^2 = (2n+1)^2 B\left(\frac{\omega'_2}{i}\right)^2 \sqrt{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}$$

qui ne dépend plus que des éléments elliptiques et des données numériques qui définissent l'expérience. La discussion de cette égalité nous conduira au nombre des solutions du problème.

Cette égalité peut s'écrire

$$(4) \qquad \frac{4Pl^2}{B(2n+1)^2\pi^2} = \left(\frac{2\omega'_2}{i\pi}\right)^2 \sqrt{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}.$$

Or, nous avons vu (n° 138) que l'on a

$$\frac{\omega'_2}{i}\sqrt{\rho} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_1'^2 \sin^2\varphi}},$$

k'_1 étant une quantité réelle comprise entre 0 et 1, et ρ ayant pour valeur

$$\rho = \sqrt{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)},$$

comme on le voit en multipliant membre à membre les expressions de $e_2 - e_1$ et $e_2 - e_3$ du n° 138. Le deuxième membre de l'équation (4) est donc le carré de l'expression

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_1'^2 \sin^2\varphi}}$$

qui est supérieure à 1, car elle croît constamment de 1 à ∞ quand $k_1'^2$ croît de 0 à 1. D'après cela, l'équation de condition (4) donne pour $k_1'^2$ une seule valeur comprise entre 0 et 1 si l'on a

$$\frac{4Pl^2}{B(2n+1)^2\pi^2} > 1,$$

ou bien

$$\frac{2l}{\pi}\sqrt{\frac{P}{B}} > (2n+1).$$

Si donc $\frac{2l}{\pi}\sqrt{\frac{P}{B}}$ est compris entre $(2\nu+1)$ et $(2\nu+3)$, en faisant successivement

$$n = 1, 2, \ldots, \nu,$$

on aura ν équations en $k_1'^2$ admettant chacune une racine comprise entre o et 1 et, par suite, il y aura ν positions d'équilibre. Si l'on a

$$\frac{2l}{\pi}\sqrt{\frac{P}{B}} < 1,$$

il n'existe plus de valeur de $k_1'^2$ comprise entre o et 1; il n'y a plus de forme d'équilibre autre que la ligne droite. Dans ce cas, le prisme droit chargé debout est en équilibre stable.

III. — Courbe élastique plane sous pression normale uniforme.

177. Énoncé et mise en équation. — Il s'agit de trouver la figure d'équilibre d'une verge élastique qui dans son état naturel était de forme rectiligne ou circulaire et qui est soumise à l'action de forces définies de la façon suivante : A chacune des extrémités de l'élastique agissent une force et un couple; en outre, sur chaque élément de l'arc agit une pression normale à l'élément, contenue dans le plan de la fibre moyenne et proportionnelle à la longueur de l'élément. Pour se représenter ces données, on peut considérer une chaudière cylindrique et la verge découpée dans la surface de cette chaudière par deux plans perpendiculaires aux génératrices du cylindre et très voisins l'un de l'autre. Ce problème a été résolu par M. Maurice Lévy.

Soient F_0 et M_0 la force et le moment du couple qui agissent sur la verge à l'une de ses extrémités A_0. Si l'on coupait l'élastique en l'un de ses points A il faudrait, pour maintenir l'équilibre, introduire une force et un couple. Soient F la force et M le moment du couple. Pour définir avec précision la pression sur un élément d'arc, comptons sur la courbe l'arc s à partir d'une origine fixe dans un sens déterminé et rapportons la courbe à deux axes rectan-

gulaires Ox et Oy. Soient s_1 l'arc qui correspond à un point A_1 de la courbe, ds_1 un élément d'arc compté à partir de ce point, α_1 l'angle que fait Ox avec la tangente en A_1, cette tangente étant menée dans le sens où l'arc va en croissant.

La pression qui s'exerce sur l'élément ds_1 a pour intensité $p\,ds_1$, p désignant une constante : nous la regarderons comme positive lorsqu'elle s'exerce dans le sens $\alpha_1 + \frac{\pi}{2}$ de sorte que ses projections sur les deux axes sont

$$p\,ds_1 \cos\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right), \qquad p\,ds_1 \sin\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right),$$

ou bien

$$-p\,ds_1 \sin\alpha_1, \quad p\,ds_1 \cos\alpha_1,$$

ou bien

$$-p\,dy_1, \quad p\,dx_1.$$

Exprimons que les forces agissant sur l'élément A_0A se font équilibre.

Nous écrirons d'abord que la somme des projections des forces sur chacun des deux axes est nulle. Nous avons, en désignant par X, Y les projections de F, par X_0, Y_0 celles de F_0,

$$X + X_0 - \int p\,dy_1 = 0,$$

$$Y + Y_0 - \int p\,dx_1 = 0.$$

Ces égalités peuvent s'écrire

$$(1)\qquad \begin{cases} X = p(y-b), \\ Y = -p(x-a), \end{cases}$$

en désignant par x, y les coordonnées du point A et par a et b des constantes. Elles expriment que la perpendiculaire menée en A à la direction de la force va passer par un point O′ de coordonnées a et b, qui reste fixe quand on fait varier la position du point A. Ce point se nomme *centre des forces élastiques*.

Nous prendrons ce point O′ comme nouvelle origine en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes. Alors les projections de F deviennent

$$X = py, \qquad Y = -px,$$

et son moment par rapport au point O′ est

$$xY - yX = -p(x^2 + y^2) = -pr^2;$$

on a ainsi l'intensité et le sens de la force F.

Nous allons écrire maintenant que la somme des moments par rapport au point O′ est nulle. D'après la théorie de l'élasticité, le moment M du couple qu'il faut joindre à la force F pour avoir l'action exercée en A sur l'arc A_0A est donné par la formule

$$(2) \qquad M = m\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right),$$

m désignant un facteur constant et positif, ρ le rayon de courbure en A dans la position d'équilibre considérée, c'est-à-dire $\frac{ds}{d\alpha}$, ρ_0 le rayon de courbure au point A dans la position naturelle.

D'autre part, le moment de la pression s'exerçant sur l'élément ds_1, ayant pour coordonnées x_1, y_1, est

$$p(x_1\,dx_1 + y_1\,dy_1) = p\frac{dr_1^2}{2};$$

les moments de la force et du couple correspondant au point A_0 sont des constantes. On a donc, en écrivant que la somme des moments des forces appliquées à l'arc A_0A est nulle,

$$m\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) - pr^2 + \frac{p}{2}\int_{r_0}^{r} dr_1^2 = \text{const.},$$

ou, en modifiant la valeur de la constante,

$$(3) \qquad m\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) - pr^2 + \frac{pr^2}{2} = \text{const.}$$

L'égalité résolue par rapport à $\frac{1}{\rho}$ est de la forme

$$(4) \qquad \frac{1}{\rho} = 4Ar^2 + 4B,$$

A et B désignant des constantes. En particulier $A = \frac{p}{2m}$, de sorte que A est positif; B peut avoir un signe quelconque; les coefficients numériques ont été mis pour simplifier l'écriture dans les calculs suivants.

Cette égalité peut être considérée comme une équation différentielle définissant la courbe élastique

178. Tableau de formules. (*Courbe élastique sous pression normale constante.*)

$$(4)\qquad \frac{1}{\rho} = 4\,\mathrm{A}\,r^2 + 4\,\mathrm{B},$$

$$(5)\qquad \frac{1}{\rho} = \frac{d\left(r^2\dfrac{d\theta}{ds}\right)}{r\,dr}.$$

$$(6)\qquad \frac{d\left(r^2\dfrac{d\theta}{ds}\right)}{dr^2} = 2\,\mathrm{A}\,r^2 + 2\,\mathrm{B}.$$

$$(7)\qquad r^2\frac{d\theta}{ds} = \mathrm{A}\,r^4 + 2\,\mathrm{B}\,r^2 + \mathrm{C},\qquad ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2,$$

$$(8)\qquad \frac{1}{4}\left(\frac{dr^2}{ds}\right)^2 = r^2 - (\mathrm{A}\,r^4 + 2\,\mathrm{B}\,r^2 + \mathrm{C})^2,$$

$$(9)\qquad \frac{d\theta}{ds} = \frac{\mathrm{A}\,r^4 + 2\,\mathrm{B}\,r^2 + \mathrm{C}}{r^2},$$

$$(10)\qquad z = \frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'v}{pu - pv},$$

$$(11)\qquad \begin{cases} p''v - 2zp'v = 2[pu - pv][p(u+v) - pv], \\ z^2 - 3pv = [pu - pv] + [p(u+v) - pv], \end{cases}$$

$$(12)\qquad \mathrm{Z} = (z^2 - 3pv)^2 - 2(p''v - 2zp'v) = [pu - p(u+v)]^2,$$

$$(13)\qquad 2(p''v - 2zp'v) = r^2,$$

$$(14)\qquad p'^2v = \frac{1}{16\,\mathrm{A}},\qquad p''v = -\frac{\mathrm{B}}{2\,\mathrm{A}},\qquad 3pv = \frac{\mathrm{B}^2 - \mathrm{AC}}{\mathrm{A}},$$

on supposera $0 < v < \omega,\qquad pv > e_1,\qquad p'v < 0,\qquad p''v > 0.$

$$(15)\qquad r^2 - (\mathrm{A}\,r^4 + 2\,\mathrm{B}\,r^2 + \mathrm{C})^2 = -[pu - p(u+v)]^2 = -\left(\frac{dz}{du}\right)^2,$$

$$(16)\qquad du = \frac{i\,ds}{2p'v},$$

$$(17)\qquad \mathrm{A}\,r^4 + 2\,\mathrm{B}\,r^2 + \mathrm{C} = [pu - pv] + [p(u+v) - pv],$$

$$(18)\qquad 2i\frac{d\theta}{du} = \frac{p'v}{pu - pv} - \frac{p'v}{p(u+v) - pv},$$

$$(19)\qquad -2i\frac{d\theta}{du} = \zeta(u+v) - \zeta(u-v) - 2\zeta v$$

$$+\,\zeta(u+2v) - \zeta(u) - 2\zeta v,$$

$$(21)\qquad u = -\frac{v}{2} - it,$$

$$(22)\qquad r^2 = \left[p\left(\frac{v}{2} + it\right) - pv\right]\left[p\left(\frac{v}{2} - it\right) - pv\right],$$

$$(23)\qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\left[\zeta\left(\frac{v}{2} + it\right) + \zeta\left(\frac{v}{2} - it\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\zeta\left(\frac{3v}{2} + it\right) + \zeta\left(\frac{3v}{2} - it\right)\right] - 2\zeta v.$$

179. Intégration par les fonctions elliptiques. — Nous allons d'abord établir une formule donnant le rayon de courbure d'une courbe définie en coordonnées polaires

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\left(r^2 \frac{d\theta}{ds}\right)}{r\,dr}.$$

On a, en effet, en désignant par α l'angle de la tangente avec Ox :

$$r^2\,d\theta = x\,dy - y\,dx,$$

$$r^2 \frac{d\theta}{ds} = x \sin\alpha - y \cos\alpha,$$

$$\frac{d}{ds}\left(r^2 \frac{d\theta}{ds}\right) = (x \cos\alpha + y \sin\alpha)\frac{d\alpha}{ds} = \left(x \frac{dx}{ds} + y \frac{dy}{ds}\right)\frac{1}{\rho} = r \frac{dr}{ds} \times \frac{1}{\rho},$$

ou enfin

$$(5) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{d\left(r^2 \frac{d\theta}{ds}\right)}{r\,dr}.$$

D'après cette formule, l'équation différentielle de la courbe peut s'écrire

$$(6) \qquad \frac{d\left(r^2 \frac{d\theta}{ds}\right)}{dr^2} = 2\mathrm{A}r^2 + 2\mathrm{B}.$$

En intégrant et en désignant par C une nouvelle constante

$$(7) \qquad r^2 \frac{d\theta}{ds} = \mathrm{A}r^4 + 2\mathrm{B}r^2 + \mathrm{C}.$$

En élevant au carré les deux membres de cette égalité (7) et en nous servant de la formule

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2,$$

nous pourrons éliminer $d\theta$. Nous trouverons ainsi l'équation

$$(8) \qquad \frac{1}{4}\left(\frac{dr^2}{ds}\right)^2 = r^2 - (\mathrm{A}r^4 + 2\mathrm{B}r^2 + \mathrm{C})^2,$$

qui définit r^2 comme fonction elliptique de l'arc s. L'angle θ est ensuite déterminé par la formule

$$(9) \qquad \frac{d\theta}{ds} = \frac{\mathrm{A}r^4 + 2\mathrm{B}r^2 + \mathrm{C}}{r^2}.$$

On définit ainsi les coordonnées polaires r et θ d'un point de la courbe en fonction de la variable s. Le calcul effectif est dû à Halphen.

180. Inversion. — On a vu, en étudiant l'inversion (nº 157), que si l'on pose

$$(10) \qquad z = \frac{1}{2}\frac{p'u - p'v}{pu - pv},$$

on a

$$(11) \qquad \begin{cases} p''v - 2zp'v = 2[pu - pv][p(u+v) - pv], \\ z^2 - 3pv = (pu - pv) + [p(u+v) - pv], \end{cases}$$

de sorte que

$$(12) \qquad Z = (z^2 - 3pv)^2 - 2(p''v - 2zp'v) = [pu - p(u+v)]^2,$$

et par suite z et $\sqrt{Z}$ s'expriment en fonction uniforme de u.

Si l'on pose

$$(13) \qquad 2(p''v - 2zp'v) = r^2,$$

le polynome Z se ramène à la forme

$$(A'r^4 + 2B'r^2 + C')^2 - r^2,$$

et pour identifier ce polynome en r^2 avec celui qui donne $-\frac{1}{4}\left(\frac{dr^2}{ds}\right)^2$ (éq. 8) il suffit de poser

$$A' = A, \qquad B' = B, \qquad C' = C.$$

Le calcul n'offre aucune difficulté et l'on trouve

$$A = \frac{1}{16p'^2v}, \qquad B = -\frac{p''v}{8p'^2v}, \qquad C = \left(\frac{p''v}{2p'v}\right)^2 - 3pv,$$

ou, en résolvant par rapport à pv, $p'v$, $p''v$,

$$(14) \qquad p'^2v = \frac{1}{16A}, \qquad p''v = -\frac{B}{2A}, \qquad 3pv = \frac{B^2 - AC}{A}.$$

Si, dans les relations qui existent entre pv, $p'v$ et $p''v$, on remplace ces quantités par leurs valeurs tirées de (14) on aura g_2 et g_3. Nous supposerons les données choisies de façon que le discriminant soit positif; les valeurs de pv et de $p'v$ sont réelles puisque A est positif et l'on peut arbitrairement choisir le signe de $p'v$. Nous

examinerons seulement le cas où v satisfait à la condition

$$0 < v < \omega,$$

de sorte que l'on a

$$\wp v > e_1, \qquad \wp' v < 0, \qquad \wp'' v > 0.$$

Les éléments elliptiques étant ainsi fixés, on a, en tenant compte des égalités (12), (13) et (10),

$$(15) \qquad r^2 - (Ar^4 + 2Br^2 + C)^2 = -[\wp u - \wp(u+v)]^2.$$

Il en résulte

$$r^2 - (Ar^4 + 2Br^2 + C)^2 = -\left(\frac{dz}{du}\right)^2.$$

Mais le premier membre est égal à $\frac{1}{4}\left(\frac{dr^2}{ds}\right)^2$ d'après l'équation différentielle de la courbe (éq. 8) : le second membre, d'après la relation (13), est égal à $-\left(\frac{dr^2}{du}\right)^2 \frac{1}{16\wp'^2 v}$; on a donc

$$(16) \qquad du = \frac{i\,ds}{2\wp' v}.$$

Cette égalité montre comment est liée à l'arc s la variable u que nous allons garder comme variable indépendante.

Nous avons déjà r^2 en fonction de u au moyen des relations (13) et (11) ; pour avoir θ il suffit de remplacer r^2 par sa valeur en fonction de u dans le second membre de l'équation (9), c'est-à-dire dans

$$\frac{Ar^4 + 2Br^2 + C}{r^2}.$$

On a d'abord, en tenant compte des relations (13) et (14),

$$Ar^4 + 2Br^2 + C = (z^2 - 3\wp v) ;$$

puis, en se servant de l'une des relations (11),

$$(17) \qquad Ar^4 + 2Br^2 + C = (\wp u - \wp v) + [\wp(u+v) - \wp v].$$

Il est facile maintenant d'obtenir en fonction de u l'expression

de $\dfrac{d\theta}{du}$; on trouve successivement

$$\frac{2i}{p'v}\frac{d\theta}{du} = \frac{(pu - pv) + [p(u+v) - pv]}{(pu - pv)[p(u+v) - pv]},$$

$$(18) \qquad 2i\frac{d\theta}{du} = \frac{p'v}{pu - pv} + \frac{p'v}{p(u+v) - pv},$$

ou, d'après la formule du n° 44

$$(19) \qquad -2i\frac{d\theta}{du} = \zeta(u+v) - \zeta(u-v) - 2\zeta v + \zeta(u+2v) - \zeta u - 2\zeta v.$$

Nous avons ainsi r^2 et θ en fonction de u. Réunissons ici les deux équations correspondantes, en appelant E une constante :

$$(20) \quad \begin{cases} r^2 = 4(pu - pv)[p(u+v) - pv], \\ e^{2i(\theta-\theta_0)} = \mathrm{E}\,e^{-4u\zeta v}\dfrac{\sigma u\,\sigma(u-v)}{\sigma(u+v)\,\sigma(u+2v)}, \end{cases} \qquad du = \frac{i\,ds}{2p'v}.$$

181. Nature des arguments. — L'expression (16) de du en fonction de ds montre que u est certainement imaginaire. D'autre part, pour que r^2 soit réel, il faut que les deux facteurs dont le produit donne r^2 soient ou tous deux réels ou tous deux imaginaires conjugués ; voyons s'ils peuvent être réels. Si une valeur imaginaire de u rend pu réel, elle est, à des périodes près, de la forme ix ou $\omega + ix$, x étant une valeur réelle ; mais les valeurs de cette forme ne rendent pas réel $p(u+v)$; elles sont donc à rejeter. Il reste à exprimer que pu et $p(u+v)$ sont imaginaires conjugués. Soit $u = a + bi$. D'après la formule d'addition donnée (n° 45) pour la fonction pu, les deux valeurs $p(a+bi)$ et $p(a-bi)$ sont imaginaires conjuguées : il faut donc que l'on ait

$$u + v = \pm(a - bi) + 2m\omega + 2n\omega',$$

m et n désignant des nombres entiers, et en égalant les parties réelles dans les deux membres

$$a + v = \pm a + 2m\omega.$$

On ne peut pas prendre le signe + puisque v n'est pas un multiple de 2ω ; il faut donc que l'on ait

$$2a = -v + 2m\omega,$$

ce qui donne

$$a = -\frac{v}{2} \quad \text{ou} \quad a = -\frac{v}{2} + \omega.$$

Nous examinerons seulement le premier cas et nous poserons

$$(21) \qquad u = -\frac{v}{2} - it,$$

t étant une variable réelle; de sorte que l'on aura

$$du = -i\,dt,$$

et comme on a trouvé (éq. 16)

$$du = \frac{i\,ds}{2\,p'v},$$

on a aussi

$$dt = -\frac{1}{2\,p'v}\,ds,$$

$p'v$ étant négatif, dt a le même signe que ds.

182. **Intervalle dans lequel il suffit de faire varier** t. — La première des formules (20) montre que r^2 ne change pas quand on change u en $u + 2\omega'$ ou bien t en $t + \frac{2\omega'}{i}$. D'autre part $\frac{d\theta}{du}$ est une fonction rationnelle de r^2; il en est de même pour $\frac{d\theta}{dt}$. Il en résulte que, pour une valeur donnée de dt, la valeur de $d\theta$ ne change pas quand on change t en $t + \frac{2\omega'}{i}$ et, par suite, que l'accroissement de θ est le même quand on fait varier t de o à t_1 ou bien de $\frac{2\omega'}{i}$ à $\frac{2\omega'}{i} + t_1$. Si donc on a construit la branche de courbe obtenue en faisant varier t de o à $\frac{2\omega'}{i}$ et si on la fait tourner d'un angle égal à l'angle des rayons extrêmes, on aura la branche de la courbe décrite quand t varie de $\frac{2\omega'}{i}$ à $\frac{4\omega'}{i}$.

D'après cela, il suffit de faire varier t de o à $\frac{2\omega'}{i}$; mais on peut restreindre cet intervalle En faisant $u = -\frac{v}{2} + it$ dans l'ex-

pression de r^2 on trouve

$$(22) \qquad \frac{r^2}{4} = \left[p\left(\frac{v}{2}+it\right)-pv\right]\left[p\left(\frac{v}{2}-it\right)-pv\right],$$

et l'on vérifie aisément que r^2 prend les mêmes valeurs pour $t_1 = \frac{\omega'}{i} + h$ et pour $t_2 = \frac{\omega'}{i} - h$.

D'autre part, pour un même accroissement dh les accroissements dt_1 et dt_2 sont de signes contraires; les accroissements correspondants $d\theta_1$ et $d\theta_2$ sont égaux et de signes contraires puisque $\frac{d\theta}{dt}$ ne dépend de t que par l'intermédiaire de r^2. Donc les accroissements que prend θ, quand on fait varier t de $\frac{\omega'}{i}$ à $\frac{\omega'}{i}+h$ puis de $\frac{\omega'}{i}$ à $\frac{\omega'}{i}-h$, sont égaux et de signes contraires. La courbe est symétrique par rapport au rayon qui correspond à $t=\frac{\omega'}{i}$, et il suffit de faire varier t de o à $\frac{\omega'}{i}$.

183. Variation de r^2. — En tenant compte de la relation (13) entre r^2 et z, on a

$$\frac{dr^2}{du} = -4p'v\frac{dz}{du} = -4p'v\frac{d}{du}\left(\frac{1}{2}\,\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right),$$

ou bien

$$\frac{dr^2}{du} = 4p'v[p(u+v)-pu],$$

et, comme on a posé $u = -\frac{v}{2} - it$,

$$\frac{dr^2}{dt} = 4ip'v\left[p\left(\frac{v}{2}+it\right)-p\left(\frac{v}{2}-it\right)\right].$$

Cherchons les valeurs de t qui annulent le second membre. Pour l'une de ces valeurs, on doit avoir, à des périodes près,

$$\frac{v}{2}+it \equiv \pm\left(\frac{v}{2}-it\right),$$

Le signe — est à rejeter, puisque v n'est pas un multiple des périodes, et par suite

$$2it = 2m\omega + 2n\omega',$$

m et n désignant des nombres entiers. Comme it est purement imaginaire

$$it = n\omega';$$

les seules valeurs de t appartenant à l'intervalle $\left(0, \frac{\omega'}{i}\right)$ qui annulent $\frac{dr^2}{dt}$ sont donc les valeurs extrêmes.

Pour reconnaître celle de ces valeurs qui correspond à un maximum, prenons la dérivée seconde

$$\frac{d^2 r^2}{dt^2} = -4\,p'v\left[p'\left(\frac{v}{2}+it\right)+p'\left(\frac{v}{2}-it\right)\right].$$

Pour $t = 0$, le second membre se réduit à $-8\,p'v\,p'\frac{v}{2}$; il est négatif puisque v et $\frac{v}{2}$ étant compris entre 0 et ω, $p'v$ et $p'\frac{v}{2}$ sont tous les deux négatifs; c'est donc $t = 0$ qui correspond au maximum. r^2 décroît constamment quand t varie de 0 à $\frac{\omega'}{i}$. Nous désignerons par r_0^2 et r_1^2 les valeurs de r^2 qui correspondent à $t = 0$ et à $t = \frac{\omega'}{i}$.

184. Variation de l'angle polaire. — Dans la formule

$$r^2\frac{d\theta}{ds} = \mathrm{A}\,r^4 + 2\,\mathrm{B}\,r^2 + \mathrm{C},$$

remplaçons ds par $-2\,p'v\,dt$, elle devient

$$-\frac{1}{2\,p'v}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = \mathrm{A}\,r^4 + 2\,\mathrm{B}\,r^2 + \mathrm{C};$$

le trinome $\mathrm{A}r^4 + 2\,\mathrm{B}r^2 + \mathrm{C}$ a ses racines réelles, puisque, d'après l'une des relations (14), $\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2$ est du signe de pv et que pv est positif. Voyons d'abord combien ce trinome a de racines comprises entre r_0^2 et r_1^2.

L'égalité (17), où l'on remplace u par $-\frac{v}{2} + it$, devient

$$\mathrm{A}\,r^4 + 2\,\mathrm{B}\,r^2 + \mathrm{C} = p\left(\frac{v}{2}+it\right)+p\left(\frac{v}{2}-it\right) - 2\,p\,v.$$

En y faisant successivement $t = 0$ puis $t = \frac{\omega'}{i}$ on trouve

$$A r_0^4 + 2 B r_0^2 + C = 2\left(p\frac{v}{2} - pv\right),$$

$$A r_1^4 + 2 B r_1^2 + C = 2\left[p\left(\frac{v}{2} + \omega'\right) - pv\right].$$

La différence $p\frac{v}{2} - pv$ est positive, puisque pu décroît, quand u croît de 0 à ω; la différence $p\left(\frac{v}{2} + \omega'\right) - pv$ est négative, puisque $p\left(\frac{v}{2} + \omega'\right)$ est compris entre e_2 et e_3 et que pv est plus grand que e_1. Donc r_0^2 et r_1^2 comprennent une seule racine du trinome.

Quand t varie de 0 à $\frac{\omega'}{i}$, r^2 décroît constamment de r_0^2 à r_1^2, $\frac{d\theta}{dt}$ change une seule fois de signe. Comme A est positif et $p'v$ négatif, on voit que l'on a

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 > 0, \qquad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_1 < 0,$$

en désignant par $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0$ et $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_1$ les valeurs de $\frac{d\theta}{dt}$ qui correspondent à $t = 0$ et à $t = \frac{\omega'}{i}$.

185. **Angle des rayons allant à deux sommets consécutifs.** — Il nous sera utile, pour étudier la forme de la courbe, de connaître l'angle des rayons correspondant aux valeurs extrêmes de l'intervalle $\left(0, \frac{\omega'}{i}\right)$ dans lequel nous faisons varier t; cet angle est la moitié de l'accroissement que prend θ quand t varie de 0 à $\frac{2\omega'}{i}$. Nous allons faire le calcul en supposant que t varie de t_0 à $t_0 + \frac{2\omega'}{i}$.

Dans la formule (19) qui donne $\frac{d\theta}{du}$, faisons $u = -\frac{v}{2} - it$ et $du = -i\,dt$; nous obtenons, en tenant compte de ce que ζu est une fonction impaire

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} = {} & \frac{1}{2}\left[\zeta\left(\frac{v}{2} + it\right) + \zeta\left(\frac{v}{2} - it\right)\right] \\ & + \frac{1}{2}\left[\zeta\left(\frac{3v}{2} + it\right) + \zeta\left(\frac{3v}{2} - it\right)\right] - 2\zeta v. \end{aligned}\right.$$

Faisons maintenant varier t de t_0 à $t_0 + \frac{2\omega'}{i}$ et désignons par 2ψ l'accroissement de θ, nous aurons

$$(24)\quad \begin{cases} 2\psi = -\dfrac{4\omega'}{i}\zeta v - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+\frac{2\omega'}{i}} \left[\zeta\left(\frac{v}{2} + it\right) + \zeta\left(\frac{v}{2} - it\right)\right] dt \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+\frac{2\omega'}{i}} \left[\zeta\left(\frac{3v}{2} + it\right) + \zeta\left(\frac{3v}{2} - it\right)\right] dt. \end{cases}$$

Le second membre se simplifie beaucoup, si l'on se sert d'une formule à laquelle nous serons conduits en cherchant à évaluer une intégrale de la forme

$$\int_{t_0}^{t_0+\frac{2\omega'}{i}} \zeta(a + it)\, dt,$$

a étant une quantité réelle telle que l'on ait

$$0 < a < 2\omega.$$

La fonction sous le signe somme est la dérivée de

$$\frac{1}{i} \operatorname{Log} \sigma(a + it);$$

l'intégrale définie est

$$\frac{1}{i} \operatorname{Log} \frac{\sigma(a + it_0 + 2\omega')}{\sigma(a + it_0)}.$$

D'après la relation (22) du n° 21 on a

$$\frac{\sigma(a + it_0 + 2\omega')}{\sigma(a + it_0)} = -\, e^{2\eta'(a+it_0+\omega')},$$

et, par suite,

$$\operatorname{Log} \frac{\sigma(a + it_0 + 2\omega')}{\sigma(a + it_0)} = 2\eta'(a + it_0 + \omega') + (2n + 1) i\pi,$$

n étant un nombre entier qui n'est pas déterminé par le calcul précédent. On en conclut

$$(25)\quad \int_{t_0}^{t_0+\frac{2\omega'}{i}} \zeta(a + it)\, dt = \frac{2\eta'}{i} a + (2n + 1)\pi + \frac{2\eta'}{i}(it_0 + \omega').$$

Dans cette égalité changeons i en $-i$ en remarquant que $\frac{\omega'}{i}$ et $\frac{\eta'}{i}$ sont réels, il vient

$$(26)\quad \int_{t_0}^{t_0+\frac{2\omega'}{i}} \zeta(a - it)\,dt = \frac{2\eta'}{i}a + (2n+1)\pi - \frac{2\eta'}{i}(it_0 + \omega'),$$

puis ajoutons membre à membre les égalités (25) et (26), nous obtenons la formule qu'il s'agissait d'établir

$$(27)\quad \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_0+\frac{2\omega'}{i}} [\zeta(a+it) + \zeta(a-it)]\,dt = \frac{2\eta'}{i}a + (2n+1)\pi.$$

Mais il reste à déterminer le nombre entier n. Cette détermination est facile quand $a = \omega$. En effet la fonction sous le signe somme est égale à

$$\frac{p'a}{p(a) - p(it)} + 2\zeta a;$$

pour $a = \omega$, elle se réduit à $2\zeta\omega$, c'est-à-dire à 2η; l'égalité précédente devient

$$\frac{2}{i}(\eta\omega' - \omega\eta') = (2n+1)\pi,$$

et l'on en conclut $n = 0$. Mais quand a varie d'une manière continue entre 0 et 2ω, le second membre de l'égalité (27) varie d'une manière continue, n ne peut changer. Donc $n = 0$ pour toute valeur de a comprise entre 0 et 2ω, et par suite l'on a

$$(28)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_0+\frac{2\omega'}{i}} [\zeta(a+it) + \zeta(a-it)]\,dt = \frac{2\eta'}{i}a + \pi, \\ 0 < a < 2\omega. \end{cases}$$

En appliquant la formule précédente à chacune des deux intégrales qui figurent dans l'expression de ψ, nous trouverons enfin

$$\psi = \pi - \frac{2}{i}(\omega'\zeta v - v\eta').$$

Cette égalité va nous permettre de trouver le signe de ψ.

Remarquons que, pour $v = \omega$, ψ est nul à cause de la relation

$\eta_1\omega' - \omega\eta_1' = \frac{i\pi}{2}$; puis cherchons comment varie ψ quand v croît de o à ω. On a

$$\frac{d\psi}{dv} = \frac{2}{i}(\omega' pv + \eta_1');$$

cette dérivée décroît constamment quand v croît de o à ω; pour $v = \omega$ elle est égale à

$$\frac{2}{i}(e_1\omega' + \eta_1').$$

Or nous avons trouvé (n° 99)

$$e_1\omega' + \eta_1' = -\frac{2\pi^2}{\omega'}\sum \frac{q_0^n}{(1-q_0^n)^2}, \qquad q_0 = e^{-i\pi\frac{\omega}{\omega'}}$$
$$n = 1, 3, 5, \ldots,$$

et l'on voit que l'on a

$$\frac{1}{i}(e_1\omega' + \eta_1') > 0.$$

Donc $\frac{d\psi}{dv}$ est positive pour $v = \omega$ et comme c'est une fonction décroissante dans l'intervalle $(0, \omega)$, elle est constamment positive dans cet intervalle. Il en résulte que ψ croît quand v croît de o à ω, et comme ψ s'annule pour $v = \omega$, on a

$$\psi < 0, \quad \text{quand} \quad 0 < v < \omega.$$

Si nous comparons maintenant le signe de ψ et celui de $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$, nous voyons que, quand t croît de o à $\frac{2\omega'}{i}$, l'angle θ commence par croître mais que sa variation totale est négative. Nous avons trouvé d'autre part que $\frac{d\theta}{dt}$ s'annule en changeant de signe pour une valeur et une seule de l'intervalle $\left(0, \frac{2\omega'}{i}\right)$: soit t' cette valeur; la discussion peut se résumer ainsi :

t croissant de o à t', θ va constamment en croissant; pour $t = t'$ le rayon vecteur est tangent à la courbe; t croissant de t' à $\frac{2\omega'}{i}$, l'angle θ décroît plus qu'il ne s'était accru quant t variait de o à t'.

186. **Signe du rayon de courbure.** — On a trouvé en commen-

çant (éq. 4) l'égalité

$$\frac{1}{\rho} = 4Ar^2 + 4B,$$

le second membre est égal à deux fois la dérivée prise par rapport à r^2 du trinome $Ar^4 + 2Br^2 + C$, et d'autre part il résulte des calculs faits pour l'inversion [formules (13), (17) et (11)] que l'on a en même temps

$$r^2 = 2(p''v - 2zp'v)$$

et

$$Ar^4 + 2Br^2 + C = z^2 - 3pv.$$

Dérivons par rapport à r^2 les deux membres de la dernière égalité

$$Ar^2 + B = z\frac{dz}{dr^2} = \frac{-z}{4p'v}.$$

On en déduit, en remplaçant z par sa valeur (10) en fonction de u,

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{2p'v}\frac{p'u - p'v}{pu - pv}.$$

Voyons comment varie le signe de $\frac{1}{\rho}$ quand t varie de 0 à $2\omega'$. r^2 va sans cesse en décroissant, $Ar^2 + B$ ne peut s'annuler qu'une fois; il nous suffira donc d'avoir les signes des valeurs de $\frac{1}{\rho}$ pour $t = 0$ et pour $t = \frac{\omega'}{i}$; nous désignerons ces valeurs par $\frac{1}{\rho_0}$ et $\frac{1}{\rho_1}$; pour $t = 0$

$$u = -\frac{v}{2}, \qquad \frac{1}{\rho_0} = \frac{p'\frac{v}{2} + p'v}{p\frac{v}{2} - pv} \times \frac{1}{2p'v},$$

pour $t = \frac{\omega'}{i}$

$$u = -\frac{v}{2} - \omega', \qquad \frac{1}{\rho_1} = \frac{p'\left(\frac{v}{2} + \omega'\right) + p'v}{p\left(\frac{v}{2} + \omega'\right) - pv} \times \frac{1}{2p'v}.$$

Les valeurs de $\frac{1}{\rho_0}$ et de $\frac{1}{\rho_1}$ peuvent se simplifier si l'on se sert de la relation

$$\frac{p''u_1}{p'u_1} = \frac{p'u_1 + p'(2u_1)}{pu_1 - p(2u_1)},$$

que l'on déduit de la formule d'addition

$$\frac{p'u - p'u_1}{pu - pu_1} = \frac{p'u + p'(u+u_1)}{pu - p(u+u_1)},$$

en y faisant tendre u vers u_1. A l'aide de cette relation, on obtient

$$(29)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho_0} = \dfrac{1}{2\,p'v\,p'\dfrac{v}{2}}\,p''\left(\dfrac{v}{2}\right), \\[2ex] \dfrac{1}{\rho_1} = \dfrac{1}{2\,p'v\,p'\left(\dfrac{v}{2}+\omega'\right)}\,p''\left(\dfrac{v}{2}+\omega'\right). \end{cases}$$

v étant compris entre o et ω, $p'v$ et $p'\frac{v}{2}$ sont négatifs, $p''\frac{v}{2}$ positif; donc on a déjà

$$\frac{1}{\rho_0} > 0.$$

D'autre part, $p'\left(\frac{v}{2}+\omega'\right)$ étant positif, $\frac{1}{\rho_1}$ est de signe contraire à

$$p''\left(\frac{v}{2}+\omega'\right).$$

Cette quantité peut s'obtenir en substituant $p\left(\frac{v}{2}+\omega'\right)$ dans le polynome du second degré en pu

$$12(pu)^2 - g_2,$$

et l'on trouve aisément que l'on aura

$$p''\left(\frac{v}{2}+\omega'\right) < 0,$$

si v satisfait à l'inégalité

$$(30)\qquad p\left(\frac{v}{2}+\omega'\right) > -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g_2}{3}}.$$

Mais on peut poser

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g_2}{3}} = p(a+\omega'),$$

a étant une quantité réelle comprise entre o et $\frac{\omega}{2}$ (*voir* p. 103, n° 1); l'inégalité (30) peut alors s'écrire

$$p\left(\frac{v}{2}+\omega'\right) > p(a+\omega'),$$

et comme $p(u+\omega')$ croît constamment quand u croît de o à ω, elle peut être remplacée par la condition

$$\frac{v}{2} > a.$$

Il faut donc, quand on étudie le signe de la courbure, distinguer les deux cas suivants, en remarquant que $(a+\omega')$ désigne l'abscisse du point le plus haut de l'ovale dans la cubique $x = pu$, $y = p'u$:

$$0 < v < 2a \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho_0} > 0, \\ \dfrac{1}{\rho_1} < 0, \end{cases}$$

$$2a < v < \omega \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho_0} > 0, \\ \dfrac{1}{\rho_1} > 0. \end{cases}$$

Il se produit une inflexion de la figure d'équilibre quand v passe en décroissant par la valeur $2a$ et il est facile de voir que l'inflexion se produit au point donné par à $t = \frac{\omega'}{i}$. En effet, la valeur correspondante de u est

$$-\frac{v}{2} - \omega' = -a - \omega',$$

et la valeur correspondante de la fonction p, savoir

$$p(a+\omega'),$$

est, d'après la définition même de a, racine de $p''(u)$, de sorte que $\frac{1}{\rho_1}$ est égal à zéro, dans le cas particulier $v = 2a$.

187. **Forme de la courbe.** — Nous avons supposé que v satisfait à la condition $0 < v < \omega$ et, dans l'étude de la courbure, nous avons été conduits à distinguer deux cas suivant que l'on a

$$v < 2a \qquad \text{ou} \qquad v > 2a.$$

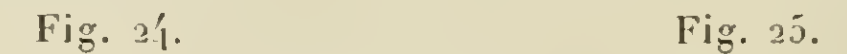
Dans les deux cas, t croissant de o à $\frac{\omega'}{i}$, l'arc s va constamment

en croissant, le rayon vecteur va constamment en décroissant et les rayons extrêmes correspondent le premier à un maximum et le second à un minimum ; l'angle θ commence par croître jusqu'à une valeur t', pour laquelle le rayon vecteur est tangent à la courbe, puis décroît jusqu'à une valeur initiale.

Pour ce qui regarde la courbure, si $v > 2a$ la courbure $\frac{d\alpha}{ds}$ est constamment positive, l'angle α correspond au sens dans lequel s croît; c'est précisément le sens dans lequel l'arc de courbe est décrit quand t varie de o à $\frac{\omega'}{i}$; le rayon de courbure est compté à partir de la courbe dans le sens $\alpha + \frac{\pi}{2}$.

Si $v < 2a$ il y a une inflexion et si v diffère peu de $2a$ le point d'inflexion est dans le voisinage du sommet qui correspond à $t = \frac{\omega'}{i}$.

On a alors les deux formes de la courbe, représentées par les *fig.* 24 et 25, dont la première correspond à $v > 2a$ et la deuxième à $v < 2a$. On a représenté par un trait plus fort l'arc décrit quand t varie de o à $\frac{\omega'}{i}$, on a marqué par une grande flèche le sens de la pression normale, et l'on a tracé aux points a et b des flèches dont le sens indique la direction de la réaction exercée par la verge. Ce sens est opposé à celui de la force extérieure qu'il faudrait appliquer pour maintenir l'équilibre (Halphen, p. 220).


Fig. 24. Fig. 25.



Sens de la pression normale. — En mettant le problème en équation nous avons supposé la pression comptée dans le sens $\alpha + \frac{\pi}{2}$; elle est donc du côté de la convexité dans le voisinage du

rayon maximum et, s'il y a inflexion, du côté de la concavité dans le voisinage du rayon minimum.

IV. — Surfaces homofocales. Coordonnées elliptiques.

188. Surfaces homofocales à un ellipsoïde et passant par un point donné. — Étant donnés trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, on appelle *surfaces homofocales à un ellipsoïde*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

les surfaces représentées par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2-s}+\frac{y^2}{b^2-s}+\frac{z^2}{c^2-s}-1=0,$$

dans laquelle s désigne un paramètre variable.

Si l'on considère celles de ces surfaces qui passent par un point donné $P(x_0, y_0, z_0)$ on a, pour déterminer les valeurs correspondantes du paramètre s, l'équation

$$\frac{x_0^2}{a^2-s}+\frac{y_0^2}{b^2-s}+\frac{z_0^2}{c^2-s}-1=0.$$

Les racines de cette équation se séparent aisément en substituant dans le premier membre des nombres voisins de a^2, b^2, c^2 et des nombres très grands en valeur absolue. Les signes des résultats de la substitution et les places des racines sont indiqués par le Tableau suivant, dans lequel ε désigne un nombre positif et très petit :

$$a^2 < b^2 < c^2.$$

	$-\infty$		$a^2-\varepsilon$	$a^2+\varepsilon$		$b^2-\varepsilon$	$b^2+\varepsilon$		$c^2-\varepsilon$	$c^2+\varepsilon$	$+\infty$
Signes....	—	:	+	—	:	—	—	:	+	—	—
Racines...		λ			μ			ν			

Il y a donc trois surfaces homofocales à l'ellipsoïde et passant par le point P. La racine λ donne un ellipsoïde réel, la racine μ un hyperboloïde à une nappe, la racine ν un hyperboloïde à deux nappes.

Les trois surfaces homofocales à l'ellipsoïde qui passent par un point donné se coupent orthogonalement en ce point.

Soit $P(x, y, z)$ le point donné, les normales aux deux surfaces λ et μ qui passent par ce point ont des cosinus directeurs proportionnels à

$$\frac{x}{a^2-\lambda}, \quad \frac{y}{b^2-\lambda}, \quad \frac{z}{c^2-\lambda},$$
$$\frac{x}{a^2-\mu}, \quad \frac{y}{b^2-\mu}, \quad \frac{z}{c^2-\mu}.$$

La condition pour que ces normales soient perpendiculaires est

$$\frac{x^2}{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)}+\frac{y^2}{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)}+\frac{z^2}{(c^2-\lambda)(c^2-\mu)}=0.$$

Or, en retranchant membre à membre les deux égalités

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}-1=0,$$
$$\frac{x^2}{a^2-\mu}+\frac{y^2}{b^2-\mu}+\frac{z^2}{c^2-\mu}-1=0,$$

et en supprimant le facteur $\lambda-\mu$, on trouve la condition qu'il s'agissait de vérifier. Donc les deux surfaces λ et μ se coupent orthogonalement au point P. On peut répéter le même raisonnement pour les surfaces λ et ν, ou μ et ν.

La proposition est donc démontrée.

189. **Coordonnées elliptiques.** — On peut déterminer un point P de l'espace en se donnant les valeurs λ, μ, ν des paramètres des trois surfaces qui sont homofocales à l'ellipsoïde donné et qui passent par ce point; λ, μ, ν se nomment les *coordonnées elliptiques* du point P. Nous avons déjà vu comment s'obtient l'équation qui donne λ, μ, ν quand x, y, z sont donnés. Calculons maintenant x, y, z en supposant λ, μ, ν donnés.

Dans l'identité

$$\frac{x^2}{a^2-s}+\frac{y^2}{b^2-s}+\frac{z^2}{c^2-s}-1\equiv\frac{(s-\lambda)(s-\mu)(s-\nu)}{(a^2-s)(b^2-s)(c^2-s)},$$

chassons les dénominateurs et faisons tendre s successivement

vers a^2, b^2, c^2 : nous trouverons

$$x^2 = \frac{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)(a^2-\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},$$

$$y^2 = \frac{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)(b^2-\nu)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)},$$

$$z^2 = \frac{(c^2-\lambda)(c^2-\mu)(c^2-\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.$$

190. Longueur d'un arc infiniment petit. — Prenons les dérivées logarithmiques des deux membres des formules ci-dessus

$$2\frac{dx}{x} = \frac{d\lambda}{\lambda-a^2} + \frac{d\mu}{\mu-a^2} + \frac{d\nu}{\nu-a^2},$$

$$2\frac{dy}{y} = \frac{d\lambda}{\lambda-b^2} + \frac{d\mu}{\mu-b^2} + \frac{d\nu}{\nu-b^2},$$

$$2\frac{dz}{z} = \frac{d\lambda}{\lambda-c^2} + \frac{d\mu}{\mu-c^2} + \frac{d\nu}{\nu-c^2},$$

et portons les valeurs de dx, dy, dz ainsi obtenues dans la formule

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

nous obtiendrons l'expression de ds^2 en coordonnées elliptiques

$$ds^2 = L^2\,d\lambda^2 + M^2\,d\mu^2 + N^2\,d\nu^2,$$

L^2, par exemple, étant définie par l'égalité

$$4L^2 = \frac{x^2}{(a^2-\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2-\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2-\lambda)^2}.$$

La valeur de $4L^2$ s'obtient en prenant les dérivées par rapport à s des deux membres de l'identité

$$\frac{x^2}{a^2-s} + \frac{y^2}{b^2-s} + \frac{z^2}{c^2-s} - 1 = \frac{(s-\lambda)(s-\mu)(s-\nu)}{(a^2-s)(b^2-s)(c^2-s)},$$

et en faisant ensuite $s=\lambda$; on trouve ainsi

$$4L^2 = \frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)}.$$

On a donc la formule

$$4\,ds^2 = \frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)}\,d\lambda^2 + \frac{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)}{(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2-\mu)}\,d\mu^2 + \frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{(a^2-\nu)(b^2-\nu)(c^2-\nu)}\,d\nu^2.$$

191. **Les coordonnées λ, μ, ν remplacées par des arguments elliptiques. Les coordonnées cartésiennes s'expriment par des fonctions uniformes de ces arguments.** — Les valeurs de x, y, z en fonction de λ, μ, ν contiennent des quantités irrationnelles par rapport à λ, μ, ν; ce sont les valeurs que prennent les radicaux

$$\sqrt{a^2-s},\quad \sqrt{b^2-s},\quad \sqrt{c^2-s},$$

quand on y remplace s par λ, μ ou ν. Mais nous savons que, si l'on considère une fonction pu et les quantités e_1, e_2, e_3 correspondantes, chacun des radicaux

$$\sqrt{pu-e_1},\quad \sqrt{pu-e_2},\quad \sqrt{pu-e_3}$$

peut être remplacé par une fonction uniforme. Nous sommes ainsi conduits à faire le changement de variable

$$-s = \mathrm{A}\,p\upsilon + \mathrm{B},$$

ce qui donne

$$a^2-s = \mathrm{A}(p\upsilon - e_1),$$
$$b^2-s = \mathrm{A}(p\upsilon - e_2),$$
$$c^2-s = \mathrm{A}(p\upsilon - e_3),$$

en posant

$$a^2+\mathrm{B} = -\mathrm{A}\,e_1,$$
$$b^2+\mathrm{B} = -\mathrm{A}\,e_2,$$
$$c^2+\mathrm{B} = -\mathrm{A}\,e_3;$$

en ajoutant membre à membre ces dernières égalités on trouve l'égalité suivante qui détermine B

$$a^2+b^2+c^2+3\mathrm{B} = 0;$$

B étant connu, e_1, e_2, e_3 sont déterminés, à un facteur près de proportionnalité et les valeurs des invariants g_2 et g_3 en résultent. A reste indéterminé; nous supposerons A positif et nous le remplacerons par ρ^2 pour que l'écriture soit simplifiée quand nous extrairons les racines.

En définitive, les invariants de la fonction $p\upsilon$ résultant des égalités

$$\rho^2 e_1 = \frac{a^2+b^2+c^2}{3} - a^2,$$

$$\rho^2 e_2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{3} - b^2,$$

$$\rho^2 e_3 = \frac{a^2+b^2+c^2}{3} - c^2;$$

si l'on pose

$$\rho^2 \mathrm{p}\upsilon = \frac{a^2+b^2+c^2}{3} - s,$$

on a

$$a^2 - s = \rho^2(\mathrm{p}\upsilon - e_1),$$
$$b^2 - s = \rho^2(\mathrm{p}\upsilon - e_2),$$
$$c^2 - s = \rho^2(\mathrm{p}\upsilon - e_3).$$

Remarquons de suite que e_1, e_2, e_3 étant réels nous sommes dans le cas du discriminant positif.

Soient u, v, w des arguments tels que $\mathrm{p}u$, $\mathrm{p}v$, $\mathrm{p}w$ soient les valeurs de $\mathrm{p}\upsilon$ quand s égale λ, μ, ν; comme les signes de

$$\mathrm{p}\upsilon - e_1, \qquad \mathrm{p}\upsilon - e_2, \qquad \mathrm{p}\upsilon - e_3$$

se déduisent immédiatement des signes de

$$a^2 - s, \quad b^2 - s, \quad c^2 - s,$$

on trouve aisément que les nombres

$$\mathrm{p}u, \quad e_1, \quad \mathrm{p}v, \quad e_2, \quad \mathrm{p}w, \quad e_3$$

sont rangés par ordre de grandeur décroissante. D'après cela u et $w - \omega'$ sont réels, $v - \omega$ est purement imaginaire.

Ce sont ces arguments u, v, w que nous voulons considérer à la place de λ, μ, ν.

Transformons les formules qui donnent x^2, y^2, z^2 en introduisant ces arguments elliptiques : elles deviennent

$$\rho^2 x^2 = \frac{(\mathrm{p}u - e_1)(\mathrm{p}v - e_1)(\mathrm{p}w - e_1)}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)},$$
$$\rho^2 y^2 = \frac{(\mathrm{p}u - e_2)(\mathrm{p}v - e_2)(\mathrm{p}w - e_2)}{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)},$$
$$\rho^2 z^2 = \frac{(\mathrm{p}u - e_3)(\mathrm{p}v - e_3)(\mathrm{p}w - e_3)}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}.$$

On peut maintenant extraire les racines en se servant des formules du n° 48 : on trouve

$$\rho x = A^2 \frac{\sigma_1 u\, \sigma_1 v\, \sigma_1 w}{\sigma u\, \sigma v\, \sigma w}, \qquad A = e^{-\frac{1}{2}\eta\omega}\sigma\omega,$$

$$\rho y = B^2 \frac{\sigma_2 u\, \sigma_2 v\, \sigma_2 w}{\sigma u\, \sigma v\, \sigma w}, \qquad B = e^{-\frac{1}{2}\eta''\omega''}\sigma\omega'', \quad \omega'' = \omega + \omega', \quad \eta'' = \eta + \eta',$$

$$\rho z = C^2 \frac{\sigma_3 u\, \sigma_3 v\, \sigma_3 w}{\sigma u\, \sigma v\, \sigma w}, \qquad C = e^{-\frac{1}{2}\eta'\omega'}\sigma\omega'.$$

Quand on change le signe de l'un des arguments u, v, w les trois coordonnées x, y, z changent de signe, le point P est remplacé par son symétrique par rapport à l'origine.

Les formules (*voir* n° 48)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sigma_\lambda(u+2\omega_\lambda)}{\sigma(u+2\omega_\lambda)}&=-\frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u},\\ \frac{\sigma_\lambda(u+2\omega_\mu)}{\sigma(u+2\omega_\mu)}&=-\frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u},\end{aligned}\qquad \begin{matrix}\lambda\\ \mu\end{matrix}\right\}=1,2,3,$$

où l'on suppose

$$\omega_1=\omega,\qquad \omega_2=\omega+\omega',\qquad \omega_3=\omega',$$

montrent que, quand on ajoute une période à l'un des arguments, on remplace le point P par son symétrique par rapport à l'un des axes.

V. — Application a la théorie de la chaleur.

192. **Les surfaces homofocales à un ellipsoïde sont des surfaces isothermes. Chacun des arguments u, v, w est un paramètre thermométrique.** — Si l'on considère les points d'un espace en équilibre de température, pour chaque point la température T est une fonction des coordonnées de ce point et l'on démontre que cette fonction vérifie l'équation différentielle

$$\Delta T=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0.$$

On dit que les surfaces d'une famille sont des surfaces isothermes si la température est la même en tous les points de l'une de ces surfaces et ne dépend, par conséquent, que du paramètre qui détermine cette surface.

Il est facile de trouver la condition pour qu'une famille de surfaces représentées par l'équation

$$\varphi(x,y,z)=\lambda,$$

dans laquelle λ désigne un paramètre variable, soit composée de surfaces isothermes. En effet, si cela a lieu, la température T ne dépend des coordonnées x, y, z que par l'intermédiaire de λ.

Calculons d'après cette remarque les dérivées de T pour les porter dans l'équation $\Delta T = 0$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \lambda^2}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial T}{\partial \lambda}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2},$$

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial \lambda^2}\left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{\partial T}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2}\right).$$

Comme $\Delta T = 0$, on doit avoir

$$(1) \qquad \frac{\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2}}{\left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2} = -\frac{\dfrac{\partial^2 T}{\partial \lambda^2}}{\dfrac{\partial T}{\partial \lambda}}.$$

Ainsi la combinaison des dérivées de λ qui est dans le premier membre doit être une fonction de λ que nous appellerons $\psi(\lambda)$.

Si cette condition est satisfaite, pour calculer T il suffira d'intégrer l'équation

$$(2) \qquad -\frac{\dfrac{\partial^2 T}{\partial \lambda^2}}{\dfrac{\partial T}{\partial \lambda}} = \psi(\lambda).$$

Appliquons ce qui précède aux surfaces

$$(3) \qquad \frac{x^2}{a^2-\lambda} + \frac{y^2}{b^2-\lambda} + \frac{z^2}{c^2-\lambda} - 1 = 0.$$

Nous poserons

$$\Phi(s) = -\frac{x^2}{a^2-s} - \frac{y^2}{b^2-s} - \frac{z^2}{c^2-s} + 1,$$

$$f(s) = (a^2-s)(b^2-s)(c^2-s).$$

Calculons d'abord $\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2$.

En différentiant par rapport à x la relation (3) qui définit λ en fonction de x, y, z, on trouve

$$(4) \qquad \left[\frac{x^2}{(a^2-\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2-\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2-\lambda)^2}\right]\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{2x}{a^2-\lambda} = 0,$$

ou bien

$$\Phi'(\lambda)\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{2x}{a^2-\lambda},$$

et de même

$$\Phi'(\lambda)\frac{\partial\lambda}{\partial y} = \frac{2y}{b^2-\lambda},$$

$$\Phi'(\lambda)\frac{\partial\lambda}{\partial z} = \frac{2z}{c^2-\lambda}.$$

On tire de là

$$(5)\qquad \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2 = -\frac{4}{\Phi'(\lambda)}.$$

Pour avoir $\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}$ différentions par rapport à x la relation (4) qui définit $\frac{\partial\lambda}{\partial x}$; nous trouverons

$$-\Phi'(\lambda)\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} + \frac{4x}{(a^2-\lambda)^2}\frac{\partial\lambda}{\partial x} - \Phi''(\lambda)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 + \frac{2}{a^2-\lambda} = 0,$$

ou, en remplaçant $\frac{\partial\lambda}{\partial x}$ par sa valeur,

$$-\Phi'(\lambda)\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} + \frac{8x^2}{(a^2-\lambda)^3}\frac{1}{\Phi'(\lambda)} - \Phi''(\lambda)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 + \frac{2}{a^2-\lambda} = 0,$$

et de même

$$-\Phi'(\lambda)\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2} + \frac{8y^2}{(b^2-\lambda)^3}\frac{1}{\Phi'(\lambda)} - \Phi''(\lambda)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2 + \frac{2}{b^2-\lambda} = 0,$$

$$-\Phi'(\lambda)\frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2} + \frac{8z^2}{(c^2-\lambda)^3}\frac{1}{\Phi'(\lambda)} - \Phi''(\lambda)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2 + \frac{2}{c^2-\lambda} = 0.$$

Si nous ajoutons membre à membre ces trois identités, les termes du milieu disparaissent et il vient

$$(6)\qquad \Phi'(\lambda)\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}\right) = -\frac{2f'(\lambda)}{f(\lambda)},$$

et comme nous avons déjà trouvé

$$\Phi'(\lambda)\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2\right] = -4,$$

on a en définitive

$$(7)\qquad \frac{\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}}{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2} = \frac{f'(\lambda)}{2f(\lambda};$$

le second membre est une fonction de λ; les surfaces

$$\lambda = \text{const.}$$

sont des surfaces isothermes.

On peut alors déterminer une fonction de λ

$$u = \psi(\lambda),$$

de telle façon que $\Delta u = 0$. Pour avoir cette fonction u, que Lamé appelle le *paramètre thermométrique,* nous avons à intégrer l'équation

$$\frac{\frac{d^2 u}{d\lambda^2}}{\frac{du}{d\lambda}} = -\frac{f'(\lambda)}{2f(\lambda)}.$$

En intégrant une première fois et en passant des logarithmes aux nombres, on trouve

$$\frac{du}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{f(\lambda)}}\frac{\rho}{2}, \tag{8}$$

en désignant le facteur constant du second membre par $\frac{\rho}{2}$ pour simplifier l'écriture dans ce qui suit. Remplaçons $f(\lambda)$ par le produit de facteurs linéaires correspondants et intégrons entre $-\infty$ et λ, nous avons

$$u = \frac{\rho}{2}\int_{-\infty}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)}};$$

λ est donc une fonction elliptique de u. Faisons comme au n° 191 le changement de variable et de notations

$$a^2 - \lambda = \rho^2(p\upsilon - e_1),$$
$$b^2 - \lambda = \rho^2(p\upsilon - e_2),$$
$$c^2 - \lambda = \rho^2(p\upsilon - e_3),$$

la relation devient

$$u = \int_{p}^{\infty} \frac{dp}{2\sqrt{(p-e_1)(p-e_2)(p-e_3)}} = \int_0^{\upsilon} d\upsilon.$$

On voit qu'elle est satisfaite en posant

$$\upsilon = u;$$

λ est donc donné en fonction de u par l'égalité

$$\lambda = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} - \rho^2 \wp u.$$

On fera correspondre de la même manière un des arguments v et w aux *coordonnées* μ et ν.

Les surfaces représentées par les équations

$$u = u_0, \qquad v = v_0, \qquad w = w_0,$$

dans lesquelles u_0, v_0, w_0 désignent des constantes, se coupent orthogonalement, puisque supposer, par exemple, que u a une valeur déterminée revient à fixer une valeur de λ.

On doit donc avoir

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

et deux relations analogues.

Expression du ds^2 en fonction des arguments u, v, w. — Dans la formule trouvée au n° 190

$$\begin{aligned} 4\,ds^2 = {} & \frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)}\,d\lambda^2 \\ & + \frac{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)}{(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2-\mu)}\,d\mu^2 + \frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{(a^2-\nu)(b^2-\nu)(c^2-\nu)}\,d\nu^2, \end{aligned}$$

introduisons les éléments elliptiques : elle devient

$$\begin{aligned} 4\,ds^2 = {} & (\wp u - \wp v)(\wp u - \wp w)\,du^2 \\ & + (\wp v - \wp u)(\wp v - \wp w)\,dv^2 + (\wp w - \wp u)(\wp w - \wp v)\,dw^2. \end{aligned}$$

193. Équation de la chaleur quand les variables sont les arguments u, v, w. — Lorsque dans l'équation

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

on fait le changement de variables

$$\begin{aligned} u &= \varphi(x, y, z), \\ v &= \psi(x, y, z), \\ w &= \chi(x, y, z), \end{aligned}$$

si les fonctions φ, ψ, χ sont telles que les surfaces obtenues en donnant à u, v, w des valeurs constantes sont orthogonales et si l'on a

$$\Delta\varphi = 0, \qquad \Delta\psi = 0, \qquad \Delta\chi = 0,$$

l'équation transformée est

$$\frac{1}{L^2}\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + \frac{1}{M^2}\frac{\partial^2 T}{\partial v^2} + \frac{1}{N^2}\frac{\partial^2 T}{\partial w^2} = 0,$$

L, M, N étant définis par cette condition que la formule définissant ds^2 est

$$ds^2 = L^2\,du^2 + M^2\,dv^2 + N^2\,dw^2.$$

Admettons, pour un instant, ce résultat et appliquons-le au cas où les nouvelles coordonnées sont les arguments elliptiques u, v, w. Nous trouverons pour l'équation transformée

$$\frac{1}{(pu - pv)(pu - pw)}\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + \frac{1}{(pv - pu)(pv - pw)}\frac{\partial^2 T}{\partial v^2} + \frac{1}{(pw - pu)(pw - pv)}\frac{\partial^2 T}{\partial w^2} = 0$$

ou bien

$$(pv - pw)\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + (pw - pu)\frac{\partial^2 T}{\partial v^2} + (pu - pv)\frac{\partial^2 T}{\partial w^2} = 0.$$

Vérifions le résultat que nous venons d'admettre : on a

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},$$

puis

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \ldots + 2\frac{\partial^2 T}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \ldots + 2\frac{\partial^2 T}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \ldots + 2\frac{\partial^2 T}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} + \ldots + \frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

En ajoutant membre à membre ces trois égalités, en se rappelant que les surfaces

$$u = \text{const.}, \qquad v = \text{const.}, \qquad w = \text{const.}$$

sont orthogonales et que l'on a

$$\Delta u = 0, \qquad \Delta v = 0, \qquad \Delta w = 0,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\Delta T = {} & \frac{\partial^2 T}{\partial u^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] \\ & + \frac{\partial^2 T}{\partial v^2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right] \\ & + \frac{\partial^2 T}{\partial w^2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right].\end{aligned}$$

Il reste à vérifier que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

et les deux expressions analogues se déduisent, comme on l'a annoncé, des coefficients du ds^2 exprimés en fonction de u, v, w. Or

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2\left[\left(\frac{\partial \lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2\right],$$

ou en remplaçant les deux facteurs du second membre par les expressions (5) et (8) trouvées au n° 192

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \frac{\rho^2}{\Phi'(\lambda)}\,\frac{1}{(\lambda - a^2)(\lambda - b^2)(\lambda - c^2)}.$$

Mais, comme

$$\Phi(s) = \frac{(s-\lambda)(s-\mu)(s-\nu)}{(s-a^2)(s-b^2)(s-c^2)},$$

on a

$$\Phi'(\lambda)(\lambda - a^2)(\lambda - b^2)(\lambda - c^2) = (\lambda - \mu)(\lambda - \nu).$$

Donc

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \rho^2\,\frac{1}{(pu - pv)(pu - pw)};$$

le facteur ρ^2 se retrouve dans les coefficients de $\frac{\partial^2 T}{\partial v^2}$ et $\frac{\partial^2 T}{\partial w^2}$. On a donc bien la forme annoncée.

Ainsi, quand on prend pour nouvelles coordonnées d'un point les arguments elliptiques u, v, w, l'équation

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

devient

$$(p v - p w) \frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + (p w - p u) \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} + (p u - p v) \frac{\partial^2 T}{\partial w^2} = 0.$$

194. Solutions dépendant d'une équation de Lamé. — Essayons de satisfaire à l'équation précédente en posant

$$T = F(u) F(v) F(w),$$

F désignant une fonction pour le moment inconnue ; il vient

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} & (p v - p w) \frac{d^2 F(u)}{du^2} F(v) F(w) \\ & + (p w - p u) \frac{d^2 F(v)}{dv^2} F(w) F(u) \\ & + (p u - p v) \frac{d^2 F(w)}{dw^2} F(u) F(v) = 0. \end{aligned} \right.$$

Or si nous supposons que $F(\upsilon)$ est une intégrale de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 z}{d\upsilon^2} = (A p \upsilon + B) z,$$

où A et B sont des constantes, nous avons

$$\frac{d^2 F(u)}{du^2} = (A p u + B) F(u),$$

$$\frac{d^2 F(v)}{dv^2} = (A p v + B) F(v),$$

$$\frac{d^2 F(w)}{dw^2} = (A p w + B) F(w),$$

et l'équation (9) se réduit à l'identité

$$0 = F(u) F(v) F(w) [(p v - p w)(A p u + B) + (p w - p u)(A p v + B) + (p u - p v)(A p w + B)];$$

par suite

$$\Delta T = 0.$$

Ainsi on peut construire une fonction T vérifiant l'équation $\Delta T = 0$, chaque fois que l'on connaît une intégrale de l'équation

$$\frac{d^2 z}{d\upsilon^2} = (A p \upsilon + B) z,$$

où A et B sont deux constantes arbitraires. Lamé a démontré qu'en donnant à A une valeur de la forme $n(n+1)$, n entier, on peut

intégrer l'équation au moyen des fonctions elliptiques pour des déterminations convenables de B. Il obtient ainsi, pour chaque valeur de l'entier n, des solutions particulières de l'équation $\Delta T = 0$, à l'aide desquelles il forme la solution générale de cette équation pour le problème que nous venons de traiter.

L'équation obtenue en faisant $A = n(n+1)$ s'appelle *équation de Lamé*. Nous reviendrons sur cette équation dans le Chapitre XI.

EXERCICE.

Quadrilatère articulé. — Soit un quadrilatère plan articulé dont les côtés ont pour longueurs a, b, c, d; appelons α, β, γ les angles des côtés a, b, c, parcourus dans un même sens de circulation, avec le côté d. En projetant le contour du quadrilatère sur le côté d et sur une perpendiculaire à ce côté, on a deux relations que l'on peut écrire

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & ax + by + cz + d = 0, \\ & \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} + d = 0, \end{aligned} \right.$$

où l'on pose

$$x = e^{\alpha i}, \qquad y = e^{\beta i}, \qquad z = e^{\gamma i}.$$

En regardant x, y, z comme des coordonnées courantes, on voit que la première des équations (1) représente un plan et la deuxième une surface du troisième ordre; leur ensemble représente donc une cubique plane. Les coordonnées d'un point de cette cubique pourront s'exprimer par des fonctions elliptiques d'un paramètre u;

$$e^{\alpha i} = f(u), \qquad e^{\beta i} = \varphi(u), \qquad e^{\gamma i} = \psi(u).$$

En faisant varier u, on pourra étudier la déformation du quadrilatère.

Si le plan et la surface (1) sont tangents, la cubique devient unicursale et les fonctions f, φ, ψ peuvent être remplacées par des fonctions rationnelles. (Darboux, *Bulletin des Sciences mathématiques*.)

CHAPITRE X.

TRANSFORMATION DE LANDEN.

195. **Division par deux de la période** 2ω. — Considérons les fonctions de Jacobi

$$H(u),\quad H_1(u),\quad \Theta(u),\quad \Theta_1(u),$$

construites avec les deux périodes 2ω, $2\omega'$, et en même temps les fonctions

$$H\left(u\,\middle|\,\frac{\omega}{2},\,\omega'\right),\quad H_1\left(u\,\middle|\,\frac{\omega}{2},\,\omega'\right),\quad \Theta\left(u\,\middle|\,\frac{\omega}{2},\,\omega'\right),\quad \Theta_1\left(u\,\middle|\,\frac{\omega}{2},\,\omega'\right),$$

construites avec les deux périodes ω et $2\omega'$. On a entre ces fonctions les relations suivantes, dans lesquelles A désigne un facteur constant,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&H\left(u\,\middle|\,\frac{\omega}{2},\,\omega'\right) = A\,H(u)\,H_1(u),\\
&\Theta\left(u\,\middle|\,\frac{\omega}{2},\,\omega'\right) = A\,\Theta(u)\,\Theta_1(u),\\
&H_1\left(u\,\middle|\,\frac{\omega}{2},\,\omega'\right) = A\,H_1\left(u+\frac{\omega}{2}\right)H_1\left(u-\frac{\omega}{2}\right),\\
&\Theta_1\left(u\,\middle|\,\frac{\omega}{2},\,\omega'\right) = A\,\Theta_1\left(u+\frac{\omega}{2}\right)\Theta_1\left(u-\frac{\omega}{2}\right).
\end{aligned}\right.$$

La première de ces relations se démontre en remarquant que les fonctions

$$H\left(u\,\middle|\,\frac{\omega}{2},\,\omega'\right)\quad \text{et}\quad H(u)\,H_1(u)$$

ont relativement aux périodes ω et $2\omega'$ les multiplicateurs définis par les égalités

$$\begin{aligned}
f(u+\omega) &= -f(u),\\
f(u+2\omega') &= -e^{-\frac{2i\pi}{\omega}(u+\omega')}f(u)
\end{aligned}$$

et admettent les mêmes zéros dans un parallélogramme des périodes : le rapport de ces deux fonctions est donc une constante.

Les trois autres relations se déduisent de celle qui donne $H\left(u \,\middle|\, \frac{\omega}{2}, \omega'\right)$ en y changeant successivement u en

$$u + \omega', \quad u + \frac{\omega}{2}, \quad u + \omega' + \frac{\omega}{2}.$$

196. Relation entre les modules et entre les multiplicateurs. — Soient k et g le module et le multiplicateur correspondant aux périodes 2ω, $2\omega'$; et soient $k_{(1)}$, $g_{(1)}$ le module et le multiplicateur correspondant aux périodes ω, $2\omega'$.

On a, d'après la définition du module et en tenant compte des relations (1),

$$\sqrt{k_{(1)}} = \frac{H_1\left(0 \,\middle|\, \frac{\omega}{2}, \omega'\right)}{\Theta_1\left(0 \,\middle|\, \frac{\omega}{2}, \omega'\right)} = \frac{H_1^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\Theta_1^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} = k \frac{\operatorname{cn}^2 \frac{\omega}{2}}{\operatorname{dn}^2 \frac{\omega}{2}}.$$

Mais si, dans les formules du n° 75, relatives à l'addition de la demi-période ω, on fait $u = -\frac{\omega}{2}$, on trouve

$$\Theta_1\left(\frac{\omega}{2}\right) = \Theta\left(\frac{\omega}{2}\right), \qquad H_1\left(\frac{\omega}{2}\right) = H\left(\frac{\omega}{2}\right);$$

on déduit de là successivement

$$\operatorname{dn} \frac{\omega}{2} = \sqrt{k'}, \qquad \operatorname{cn} \frac{\omega}{2} = \sqrt{k'} \operatorname{sn} \frac{\omega}{2}, \qquad \operatorname{sn} \frac{\omega}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + k'}}.$$

D'après cela

$$(2) \qquad \sqrt{k_{(1)}} = \frac{k}{1 + k'} = \frac{\sqrt{1 - k'^2}}{1 + k'} = \sqrt{\frac{1 - k'}{1 + k'}}.$$

Cette relation peut encore s'écrire

$$(2') \qquad 1 - k_{(1)} = \frac{2}{1 + k'}.$$

D'après la définition même du multiplicateur (n° 92), on a

$$g = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H'(0)}{\Theta(0)},$$

$$g_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{k_{(1)}}} \frac{H'\left(0 \,\middle|\, \frac{\omega}{2}, \omega'\right)}{\Theta\left(0 \,\middle|\, \frac{\omega}{2}, \omega'\right)}.$$

La valeur de $g_{(1)}$ peut s'écrire successivement

$$g_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{k_{(1)}}} \frac{H'(0)\, H_1(0)}{\Theta(0)\, \Theta_1(0)},$$

$$g_{(1)} = g \frac{k}{\sqrt{k_{(1)}}}$$

et, en remplaçant $k_{(1)}$ par sa valeur tirée de (2), on trouve entre les multiplicateurs g et $g_{(1)}$ la relation suivante

(3) $$g_{(1)} = g(1 + k').$$

A partir de maintenant nous supposerons les quantités ω et $\frac{\omega'}{i}$ réelles.

197. Relation entre les intégrales K et $K_{(1)}$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \qquad K_{(1)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_{(1)}}{\sqrt{1 - k_{(1)}^2 \sin^2 \varphi_{(1)}}}.$$

Nous avons déjà remarqué que de l'équation différentielle vérifiée par $z = \operatorname{sn}(u; k, g)$

$$\frac{dz}{du} = g\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)},$$

on déduit

$$g\omega = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

ou bien

$$g\omega = K.$$

On obtiendrait de même

$$g_{(1)} \frac{\omega}{2} = K_{(1)},$$

et en divisant membre à membre ces deux égalités on trouve

$$\frac{K}{K_{(1)}} = 2\frac{g}{g_{(1)}} = \frac{2}{1+k'},$$

puis, en se reportant à la relation (2′) entre les modules,

$$K = K_{(1)}(1 + k_{(1)}).$$

198. Calcul de K quand k est donné. — Concevons qu'on applique plusieurs fois la transformation précédente, on trouvera successivement

$$K = K_{(1)}(1 + k_1),$$
$$K_{(1)} = K_{(2)}(1 + k_2),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$K_{(n-1)} = K_{(n)}(1 + k_n),$$

puis, en multipliant membre à membre toutes ces égalités,

$$K = K_{(n)}(1 + k_{(1)})(1 + k_{(2)})\dots(1 + k_{(n)}),$$

comme on a

$$K_{(n)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_{(n)}^2 \sin^2\varphi}} > \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2},$$

on a aussi, quel que soit n,

$$\frac{\pi}{2}(1 + k_{(1)})(1 + k_{(2)})\dots(1 + k_{(n)}) < K;$$

k_n est toujours positif; le produit qui est dans le premier membre va donc constamment en croissant quand n croît, et comme il est constamment inférieur à K, il tend vers une limite quand n augmente indéfiniment. Il en résulte que $k_{(n)}$ tend vers zéro et par suite que $K_{(n)}$ a pour limite $\frac{\pi}{2}$. On a donc

$$K = \frac{\pi}{2}(1 + k_{(1)})(1 + k_{(2)})\dots(1 + k_{(n)})\dots.$$

Cette formule est utile lorsque l'on veut calculer la valeur numérique de K, en supposant k donné. On la met sous une forme plus commode pour les calculs numériques en posant

$$k = \sin\theta,$$

ce qui donne, en se reportant à la formule (2),

$$k_{(1)} = \operatorname{tang}^2 \frac{\theta}{2} \qquad \text{et} \qquad 1 + k_{(1)} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}},$$

puis

$$k_{(1)} = \operatorname{tang}^2 \frac{\theta}{2} = \sin \theta_{(1)}, \qquad k_{(2)} = \operatorname{tang}^2 \frac{\theta_{(1)}}{2} = \sin \theta_2, \qquad \ldots;$$

on en déduit

$$1 + k_{(1)} = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}\theta}, \qquad 1 + k_{(2)} = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}\theta_{(1)}}, \qquad 1 + k_{(3)} = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}\theta_{(2)}}, \qquad \ldots$$

et par suite

$$\frac{\pi}{2\mathrm{K}} = \cos^2 \frac{1}{2}\theta \cos^2 \frac{1}{2}\theta_{(1)} \cos^2 \frac{1}{2}\theta_{(2)} \cdots$$

(*Voir* Durège, *Theorie der elliptischen Functionen*, p. 177.)

Prenons comme exemple $k^2 = \frac{1}{2}$, $\theta = 45°$.

Dans ce Tableau de calcul, on a séparé par plusieurs points le nombre de son logarithme de sorte que l'on a mis

$$\mathrm{N} \ldots\ldots \quad \text{au lieu de} \quad \mathrm{Log}\,\mathrm{N} = .$$

De plus les logarithmes à caractéristique négative sont augmentés de 10.

$\theta = 45°\ 0'0'',00$	$\theta_{(1)} = 9°52'45'',41$	$\theta_{(2)} = 0°25'40'',74$
$\frac{1}{2}\theta = 22°30'0'',00$	$\frac{1}{2}\theta_{(1)} = 4°56'22'',70$	$\frac{1}{2}\theta_{(2)} = 0°12'50'',37$
$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta$ 9,617 2243	$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta_{(1)}$ 8,936 6504.5	$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta_{(2)}$ 7,572 2761.7
$\cos\frac{1}{2}\theta$ 9,965 6153	$\cos\frac{1}{2}\theta_{(1)}$ 9,998 3840.1	$\cos\frac{1}{2}\theta_{(2)}$ 9,999 9970.0
$\left.\begin{matrix}\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta \\ \sin\theta_{(1)}\end{matrix}\right\}$ 9,234 4486	$\left.\begin{matrix}\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta_{(1)} \\ \sin\theta_{(2)}\end{matrix}\right\}$ . . 7,873 3009.0	$\left.\begin{matrix}\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta_{(2)} \\ \sin\theta_{(3)}\end{matrix}\right\}$ ... 5,144 5523.4

$$\theta_{(3)} = 0°0'3'', \qquad \cos\theta_{(3)} \ldots\ldots\ldots \quad 0,000\ 0000,$$

On a donc

$\cos^2 \frac{1}{2} \theta$	9,931 2306.0
$\cos^2 \frac{1}{2} \theta_{(1)}$	9,996 7680.2
$\cos^2 \frac{1}{2} \theta_{(2)}$	9,999 9940.0
$\frac{\pi}{2K}$	9,927 9926.2
$\frac{\pi}{2}$	0,196 1198.7
K	0,268 1272.5

$$K = 1,854\ 0747.$$

199. **Calcul de la valeur de l'intégrale**

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

quand k **et** φ **sont donnés.** — Soit $z = \mathrm{sn}(u; k, g)$, on a

$$gu = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

ou en posant

$$z = \sin \varphi,$$

$$gu = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

de sorte que, u et φ étant liés par la relation précédente, on a

$$\mathrm{sn}(u; k, g) = \sin \varphi;$$

on s'assure aisément que

$$\mathrm{cn}(u; k, g) = \cos \varphi.$$

et

$$\mathrm{dn}(u; k, g) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}.$$

Considérons en même temps $z_1 = \mathrm{sn}(u; k_{(1)}, g_{(1)})$ en posant

$$g_{(1)} u = \int_0^{\varphi_{(1)}} \frac{d\varphi_{(1)}}{\sqrt{1 - k_{(1)}^2 \sin^2 \varphi_{(1)}}},$$

on aura

$$\operatorname{sn}(u;\, k_{(1)},\, g_{(1)}) = \sin\varphi_{(1)}.$$

Si maintenant k et g correspondent aux périodes 2ω, $2\omega'$ et si $k_{(1)}$ et $g_{(1)}$ correspondent de même aux périodes ω, $2\omega'$, on aura, comme nous l'avons vu,

$$\frac{g}{g_{(1)}} = \frac{1 + k_{(1)}}{2}.$$

Alors en prenant le rapport des intégrales dont les limites supérieures sont φ et $\varphi_{(1)}$, on trouve

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \frac{1 + k_{(1)}}{2} \int_0^{\varphi_{(1)}} \frac{d\varphi_{(1)}}{\sqrt{1 - k_{(1)}^2 \sin^2\varphi_{(1)}}},$$

et l'intégrale dont la limite supérieure est φ se trouvera ramenée à l'intégrale dont la limite supérieure est $\varphi_{(1)}$, quand nous aurons obtenu une relation finie entre φ et $\varphi_{(1)}$.

Cette relation, que l'on peut obtenir par des considérations géométriques, nous sera utile sous la forme

$$\operatorname{tang}(\varphi_{(1)} - \varphi) = k' \operatorname{tang}\varphi$$

ou bien

$$\frac{\operatorname{tang}\varphi_{(1)} - \operatorname{tang}\varphi}{1 + \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\varphi_{(1)}} = k' \operatorname{tang}\varphi$$

ou encore

$$\operatorname{tang}\varphi_{(1)} = \frac{(1 + k')\operatorname{tang}\varphi}{1 - k' \operatorname{tang}^2\varphi}.$$

Pour vérifier cette dernière égalité il suffit de remarquer que

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u} = \frac{1}{\sqrt{k'}} \frac{\mathrm{H}(u)}{\mathrm{H}_1(u)}$$

et de se reporter aux formules (1) du n° 195 donnant $\mathrm{H}\left(u \,\middle|\, \frac{\omega}{2}, \omega'\right)$ et $\mathrm{H}_1\left(u \,\middle|\, \frac{\omega}{2}, \omega'\right)$; on trouve ainsi

$$\sqrt{k'_{(1)}} \operatorname{tang}\varphi_{(1)} = -\frac{\mathrm{H}(u)\,\mathrm{H}_1(u)}{\mathrm{H}\left(u + \frac{\omega}{2}\right) \mathrm{H}\left(u - \frac{\omega}{2}\right)}.$$

Transformons le dénominateur du second membre d'après

l'identité, facile à vérifier,

$$\mathrm{H}_1^2(0)\,\mathrm{H}\left(u+\frac{\omega}{2}\right)\mathrm{H}\left(u-\frac{\omega}{2}\right)=\mathrm{H}_1^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\mathrm{H}^2(u)-\mathrm{H}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\mathrm{H}_1^2(u),$$

nous pourrons écrire

$$\sqrt{k'_{(1)}}\,\operatorname{tang}\varphi_{(1)}=\frac{\mathrm{H}(u)\,\mathrm{H}_1(u)\,\mathrm{H}_1^2(0)}{\mathrm{H}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\mathrm{H}_1^2(u)-\mathrm{H}_1^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\mathrm{H}^2(u)},$$

ou en divisant les deux termes du second membre par $\mathrm{H}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\mathrm{H}_1^2(u)$

$$\operatorname{tang}\varphi_{(1)}=\mathrm{C}\frac{\operatorname{tang}\varphi}{1-\dfrac{\mathrm{H}_1^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\mathrm{H}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}\dfrac{\mathrm{H}^2(u)}{\mathrm{H}_1^2(u)}},$$

C désignant un facteur constant; ce facteur se détermine en divisant les deux membres par u et faisant ensuite tendre u vers zéro, ce qui donne

$$\mathrm{C}=\frac{g_{(1)}}{g}=1+k'.$$

En tenant compte enfin de la formule

$$\frac{\operatorname{cn}^2\frac{\omega}{2}}{\operatorname{sn}^2\frac{\omega}{2}}=k',$$

on a bien

$$\operatorname{tang}\varphi_{(1)}=\frac{(1+k')\operatorname{tang}\varphi}{1-k'\operatorname{tang}^2\varphi}$$

ou encore

$$\operatorname{tang}(\varphi_{(1)}-\varphi)=k'\operatorname{tang}\varphi,$$

comme nous voulions le vérifier.

Cela posé, concevons qu'on applique plusieurs fois de suite la même transformation en posant pour abréger, d'après Legendre,

$$\mathrm{F}(\varphi,k)=\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

nous aurons successivement

$$F(\varphi, k) = \frac{1+k_{(1)}}{2} F(\varphi_{(1)}, k_{(1)}),$$

$$F(\varphi_{(1)}, k_{(1)}) = \frac{1+k_{(2)}}{2} F(\varphi_{(2)}, k_{(2)}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F(\varphi_{(n-1)}, k_{(n-1)}) = \frac{1+k_{(n)}}{2} F(\varphi_{(n)}, k_{(n)}),$$

et en multipliant membre à membre ces égalités

$$F(\varphi, k) = \frac{(1+k_{(1)})(1+k_{(2)})\ldots(1+k_{(n)})}{2^n} F(\varphi_{(n)}, k_{(n)}).$$

Supposons maintenant que n augmente indéfiniment, nous avons vu que k_n tend vers zéro et l'on en conclut

$$\lim F(\varphi_{(n)}, k_{(n)}) = \lim \varphi_{(n)}.$$

Comme d'autre part on a trouvé

$$\frac{\pi}{2}(1+k_{(1)})(1+k_{(2)})\ldots = K,$$

on voit que, en définitive

$$F(\varphi, k) = \frac{2K}{\pi} \lim \frac{\varphi_{(n)}}{2^n}.$$

Pour calculer successivement les angles $\varphi_{(1)}, \varphi_{(2)}, \ldots, \varphi_{(n)}, \ldots,$ nous aurons les formules

$$\tan\mathrm{g}(\varphi_{(1)} - \varphi) = k' \tan\mathrm{g}\,\varphi, \qquad k_{(1)} = \frac{1-k'}{1+k'},$$

$$\tan\mathrm{g}(\varphi_{(2)} - \varphi_{(1)}) = k'_{(1)} \tan\mathrm{g}\,\varphi_{(1)}, \qquad k_{(2)} = \frac{1-k'_{(1)}}{1+k'_{(1)}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \qquad \cdots\cdots\cdots,$$

$$\tan\mathrm{g}(\varphi_{(n)} - \varphi_{(n-1)}) = k'_{(n-1)} \tan\mathrm{g}\,\varphi_{(n-1)}, \qquad k_{(n)} = \frac{1-k'_{(n-1)}}{1+k'_{(n-1)}}.$$

Quand n est très grand $k_{(n)}$ est très petit, comme nous l'avons vu ; alors $k'_{(n-1)}$ est très voisin de l'unité et l'on a sensiblement

$$\varphi_{(n)} - \varphi_{(n-1)} = \varphi_{(n-1)},$$

ou bien

$$\varphi_{(n)} = 2\varphi_{(n-1)};$$

alors

$$\frac{\varphi_{(n)}}{2^n} = \frac{\varphi_{(n-1)}}{2^{n-1}}.$$

Donc à partir d'une valeur suffisamment grande de n, $\frac{\varphi_{(n)}}{2^n}$ reste sensiblement constante et l'on aperçoit ainsi que $\frac{\varphi_{(n)}}{2^n}$ tend vers une limite quand n augmente indéfiniment. *does not follow.*

Exemple numérique. — (Nous l'empruntons à la *Théorie des fonctions elliptiques* de Durège, p. 178.)

Soient

$$k^2 = \frac{1}{2}, \qquad \varphi = 30^\circ$$

les valeurs données de k^2 et de φ.

Il résulte d'un calcul précédent que l'on a

$\frac{2K}{\pi}$	0,072 0073.8.
$k' = \cos\theta$....	9,849 4850,
$k'_1 = \cos\theta_1$...	9,993 5118,
$k'_2 = \cos\theta_2$...	9,999 9878.9,
$k'_3 = \cos\theta_3$...	1,000 0000.0,

Voici maintenant le calcul des angles φ_1, φ_2. φ_3 :

$\varphi = 30^\circ$		$\varphi_1 = 52^\circ 12' 27'', 56$		$\varphi_2 = 104^\circ 0' 0'', 14$	
tang φ........	9,761 4394	tang φ_1......	0,110 4374.9	tang φ_2.......	0,603 2276.5
k'...........	9,849 4850	k'_1...........	9,993 5118	k'_2...........	9,999 9878.9
tang$(\varphi_1 - \varphi)$..	9,610 9244	tang$(\varphi_2 - \varphi_1)$.	0,103 9492.0	tang$(\varphi_3 - \varphi_2)$.	0,603 2155.4
$\varphi_1 - \varphi = 22^\circ 12' 27'', 59$		$\varphi_2 - \varphi_1 = 51^\circ 47' 32'', 58$		$\varphi_3 - \varphi_2 = 104^\circ 0' 1'', 40$	
$\varphi_1 = 52^\circ 12' 27'', 56$		$\varphi_2 = 104^\circ\ 0'\ 0'', 14$		$\varphi_3 = 208^\circ 0' 1'', 40$	

On prendra ici comme valeur approchée de $\lim \frac{\varphi_{(n)}}{2^n}$ le rapport

$$\frac{\varphi_3}{2^3} = \frac{1}{8}(208^\circ 0' 1'' 54) = 93600'', 19.$$

Pour exprimer cet angle en parties de rayons on divise le

nombre de secondes par 206 264,8

$$\begin{aligned}
\text{Log } 93\,600'',19 &= 4,971\ 2767.9\\
\text{Log } 206\,264'',8 &= 5,314\ 4251.3\\
\hline
&\ 9,656\ 8515.7\\
\text{Log}\frac{2K}{\pi} &= 0,072\ 0073.8\\
\hline
\text{Log F}(\varphi, k) &= 9,728\ 8589.5
\end{aligned}$$

$$F(\varphi, k) = 0,535\ 6221 \qquad \text{pour} \qquad \varphi = 30° \qquad \text{et} \qquad k^2 = \frac{1}{2}.$$

Remarque. — Lorsque le module est devenu très petit le calcul des modules suivants peut se simplifier. (*Voir* Bertrand, *Calcul intégral*, p. 661.)

EXERCICES SUR LE CHAPITRE X.

Division de la période 2ω par un nombre impair n. — En posant avec Jacobi $\Im(x) = \Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)$ vérifier l'identité

$$\Im(x)\Im\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\Im\left[x+(n-1)\frac{2\pi}{n}\right] = C\,\Im(nx, q^n),$$

où l'on suppose que, $\Im(x)$ correspondant aux périodes 2ω et $2\omega'$, $\Im(x, q^n)$ correspond aux périodes $\frac{2\omega}{n}$, $2\omega'$, et où C désigne un facteur constant.

On peut remarquer que le premier membre d'une part et $\Im(xx, q^n)$ d'autre part sont deux fonctions qui admettent les mêmes multiplicateurs pour les périodes 2ω, $2\omega'$ et qui ont les mêmes zéros dans un parallélogramme des périodes.

On a une vérification intéressante de l'identité précédente en considérant le produit infini qui donne $\Im(nx, q^n)$, savoir

$$C\,\Im(nx, q^n) = (1-2q^n\cos 2nx + q^{2n})$$
$$\times(1-2q^{3n}\cos 2nx+q^{6n})(1-2q^{5n}\cos 2nx+q^{10n})\ldots,$$

et décomposant chaque facteur de ce produit d'après l'identité suivante

(théorème de Cotes)

$$1 - 2q^n \cos 2nx + q^{2n} = \prod_r \left[1 - 2q \cos 2\left(x + \frac{r\pi}{n}\right) + q^2\right]$$

pour

$$r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,$$

ou, ce qui revient au même puisque n est impair,

$$\frac{r}{2} = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

D'après cette vérification l'identité résulte de ce que, dans un produit infini absolument convergent, on peut remplacer plusieurs facteurs par leur produit effectué et réciproquement.

Vérifier la formule

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \mathfrak{S}_1(x)\mathfrak{S}_1\left(x + \frac{2\pi}{n}\right)\cdots\mathfrak{S}_1\left[x + (n-1)\frac{2\pi}{n}\right] = C'\mathfrak{S}_1(nx, q^n),$$

où $\mathfrak{S}_1(x)$ désigne la fonction $H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)$, C' une constante et n un nombre impair; de plus $\mathfrak{S}_1(x)$ correspondant aux périodes 2ω et $2\omega'$, $\mathfrak{S}_1(nx, q^n)$ correspond aux périodes $\frac{2\omega}{n}$, $2\omega'$.

Des formules des deux exercices précédents déduire la suivante

$$\operatorname{sn}\left(\frac{2nK^{(n)}x}{\pi}, k^{(n)}\right) = C \operatorname{sn}\frac{2K}{\pi}x \operatorname{sn}\frac{2K}{\pi}\left(x + \frac{2\pi}{n}\right)\cdots\operatorname{sn}\frac{2K}{\pi}\left[x + (n-1)\frac{2\pi}{n}\right],$$

où l'on suppose que $k^{(n)}$ et $K^{(n)}$ correspondent aux périodes $\frac{2\omega}{n}$, $2\omega'$ comme k et K correspondent à 2ω et $2\omega'$ et où C a la valeur constante

$$C = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\frac{k^n}{k^{(n)}}}.$$

CHAPITRE XI.

FONCTIONS A MULTIPLICATEURS CONSTANTS OU FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES DE SECONDE ESPÈCE.

200. **Définitions.** — Dans plusieurs questions de Mécanique et de Physique mathématique, on est conduit à étudier des fonctions uniformes de u, n'admettant à distance finie d'autres singularités que des pôles et se reproduisant *multipliées* par des *constantes* μ ou μ' quand on ajoute à u l'une ou l'autre des périodes 2ω et $2\omega'$. L'une quelconque de ces fonctions $F(u)$ vérifie donc deux relations de la forme

$$F(u+2\omega)=\mu F(u), \qquad F(u+2\omega')=\mu' F(u).$$

M. Hermite, qui a fait l'étude des fonctions de cette nature (*Sur quelques applications des fonctions elliptiques*, Gauthier-Villars, 1885), leur a donné le nom de *fonctions doublement périodiques de deuxième espèce;* ces fonctions se réduisent aux fonctions doublement périodiques ordinaires ou fonctions elliptiques, quand les deux multiplicateurs constants μ et μ' se réduisent à l'unité. Quand les multiplicateurs μ et μ' seront donnés, nous appellerons les fonctions telles que $F(u)$, *fonctions aux multiplicateurs constants* μ *et* μ'; les fonctions elliptiques sont alors des fonctions aux multiplicateurs 1 et 1.

Les relations

$$F(u+2\omega)=\mu F(u),$$
$$F(u+2\omega')=\mu' F(u)$$

entraînent évidemment la suivante où m et n sont des entiers positifs, négatifs ou nuls :

$$F(u+2m\omega+2n\omega')=\mu^m \mu'^n F(u).$$

Il en résulte que, si la fonction $F(u)$ admet un pôle $u=a$, elle

admet comme pôles, au même degré de multiplicité, tous les points homologues

$$a_{m,n} = a + 2m\omega + 2n\omega'.$$

Si le résidu relatif au pôle a est A, le résidu relatif au pôle $a_{m,n}$ est $\mu^m \mu'^n$A. De même, si la fonction $F(u)$ admet un zéro $u = b$, elle admet comme zéros, avec le même ordre de multiplicité, tous les points homologues.

Exemple. — Voici quelques exemples de ces nouvelles fonctions. Soient A, α et λ des constantes, la fonction

$$f(u) = A\,\frac{H(u-\alpha)}{H(u)}\,e^{\lambda u}$$

est une fonction aux multiplicateurs

$$\mu = e^{2\lambda\omega}, \qquad \mu' = e^{\frac{i\pi\alpha}{\omega} + 2\lambda\omega'}.$$

En effet, les relations fondamentales

$$H(u + 2\omega) = -H(u),$$
$$H(u + 2\omega') = -H(u)e^{-\frac{i\pi}{\omega}(u+\omega')}$$

donnent les suivantes :

$$f(u + 2\omega) = f(u)e^{2\lambda\omega},$$
$$f(u + 2\omega') = f(u)e^{\frac{i\pi\alpha}{\omega} + 2\lambda\omega'}.$$

La théorie du pendule sphérique nous fournit un autre exemple de ce genre de fonctions. Nous avons trouvé, en effet, pour $x + iy$ une expression de la forme suivante (p. 95)

$$\varphi(u) = A\,\frac{\sigma(u+a)\,\sigma(u-b)}{\sigma^2 u}\,e^{\lambda u},$$

A, a, b, λ désignant des constantes. Or, d'après les relations fondamentales

$$\sigma(u + 2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)}\sigma u,$$
$$\sigma(u + 2\omega') = -e^{2\eta'(u+\omega')}\sigma u,$$

cette fonction φ vérifie les relations

$$\varphi(u+2\omega) = e^{2\eta(a-b)+2\lambda\omega}\,\varphi(u),$$
$$\varphi(u+2\omega') = e^{2\eta'(a-b)+2\lambda\omega'}\,\varphi(u);$$

c'est donc une fonction aux multiplicateurs constants

$$\mu = e^{2\eta(a-b)+2\lambda\omega},$$
$$\mu' = e^{2\eta'(a-b)+2\lambda\omega'}.$$

Dans la théorie que nous allons développer, nous supposerons les multiplicateurs μ et μ' donnés et nous formerons les expressions analytiques des fonctions qui admettent ces multiplicateurs. M. Hermite a indiqué, pour ces fonctions, deux formes principales correspondant aux deux formes fondamentales des fonctions elliptiques.

L'une de ces formes donne la fonction comme le quotient de deux produits de fonctions H ou σ : elle met en évidence les zéros et les pôles de la fonction. L'autre forme est analogue à la formule de décomposition en éléments simples; elle met en évidence les pôles et les parties principales correspondantes.

Les seuls éléments analytiques nécessaires pour cette théorie sont les fonctions H ou σ.

I. — Décomposition en facteurs. Conséquences.

201. Expression générale des fonctions à multiplicateurs constants. — Soit $F(u)$ une fonction aux *multiplicateurs constants donnés* μ et μ'. Par hypothèse cette fonction n'a d'autres points singuliers que des pôles à distance finie et vérifie les deux équations

$$(1) \qquad \begin{cases} F(u+2\omega) = \mu F(u), \\ F(u+2\omega') = \mu' F(u). \end{cases}$$

Pour obtenir une première expression de la fonction $F(u)$, remarquons que la fonction particulière

$$(2) \qquad f(u) = A\,\frac{H(u-\alpha)}{H(u)}\,e^{\lambda u},$$

considérée dans le numéro précédent, vérifie les relations

$$(3) \qquad \begin{cases} f(u+2\omega) = \mu f(u), \\ f(u+2\omega') = \mu' f(u), \end{cases}$$

où

$$(4) \qquad \mu = e^{2\lambda\omega}, \qquad \mu' = e^{\frac{i\pi\alpha}{\omega}+2\lambda\omega'}.$$

On peut toujours disposer des constantes λ et α de façon à faire prendre à ces multiplicateurs des valeurs *données* à l'avance. En effet, μ et μ' étant donnés, on a

$$(5) \qquad \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{2\omega}\operatorname{Log}\mu, \\ \alpha = \dfrac{1}{i\pi}(\omega\operatorname{Log}\mu' - \omega'\operatorname{Log}\mu), \end{cases}$$

$\operatorname{Log}\mu$ ayant la même détermination dans les deux équations.

Avec ce choix des constantes λ et α, on a, par la formule (2), une fonction particulière $f(u)$ aux multiplicateurs donnés μ et μ'. Mais alors, si l'on revient à la fonction générale $F(u)$ aux mêmes multiplicateurs, le quotient

$$(6) \qquad \Phi(u) = \frac{F(u)}{f(u)}$$

est une *fonction elliptique* aux périodes 2ω et $2\omega'$. En effet, quand u augmente de l'une de ces périodes, F et f se reproduisent multipliées par le même facteur et $\Phi(u)$ ne change pas.

On obtient ainsi une première expression générale des fonctions aux multiplicateurs constants μ et μ', en prenant

$$F(u) = A e^{\lambda u}\frac{H(u-\alpha)}{H(u)}\Phi(u),$$

les constantes λ et α étant déterminées par les relations (5) et $\Phi(u)$ désignant une fonction elliptique aux périodes 2ω et $2\omega'$.

202. **Décomposition en facteurs.** — La formule de décomposition en facteurs se déduit immédiatement de ce résultat. En effet, la fonction elliptique $\Phi(u)$ peut se mettre sous la forme suivante

(n° 40)

$$\Phi(u) = A' \frac{H(u-b_1)H(u-b_2)\ldots H(u-b_r)}{H(u-a_1)H(u-a_2)\ldots H(u-a_r)},$$

avec la condition

$$(7) \qquad b_1 + b_2 + \ldots + b_r = a_1 + a_2 + \ldots + a_r.$$

La fonction aux multiplicateurs constants μ et μ' peut donc s'écrire

$$(8) \qquad F(u) = Be^{\lambda u} \frac{H(u-\alpha)H(u-b_1)\ldots H(u-b_r)}{H(u)H(u-a_1)\ldots H(u-a_r)}.$$

Telle est la formule de décomposition en facteurs. Elle conduit aux conséquences suivantes :

1° *Une fonction à multiplicateurs constants possède, dans un parallélogramme des périodes, autant de zéros que d'infinis.* Cela résulte de ce que, dans la formule (8) ci-dessus, il entre autant de fonctions H au numérateur qu'au dénominateur.

2° *Si l'on considère, d'une part, les zéros, d'autre part les infinis que possède une fonction aux multiplicateurs μ et μ' dans un parallélogramme des périodes, la différence entre la somme de ces zéros et la somme de ces infinis est égale à*

$$\frac{1}{i\pi}(\omega \operatorname{Log}\mu' - \omega' \operatorname{Log}\mu),$$

à des multiples des périodes près.

En effet, la fonction $F(u)$ définie par la formule (8) a, dans un parallélogramme des périodes, des infinis homologues des points

$$0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_r,$$

et des zéros homologues des points

$$\alpha, \quad b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_r.$$

La différence entre la somme des zéros et celle des infinis est donc

$$(9) \quad \alpha + b_1 + b_2 + \ldots + b_r - (a_1 + a_2 + \ldots + a_r) + 2m\omega + 2n\omega';$$

si l'on tient compte de la relation

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_r = a_1 + a_2 + \ldots + a_r,$$

et de la valeur (5) de α, on voit que la différence considérée (9) est

$$\frac{1}{i\pi}(\omega \operatorname{Log}\mu' - \omega' \operatorname{Log}\mu) + 2m\omega + 2n\omega',$$

ce qui démontre le théorème.

Changer les déterminations choisies pour $\operatorname{Log}\mu'$ et $\operatorname{Log}\mu$ revient à modifier les entiers m et n. On pourrait, par exemple, choisir les déterminations des deux logarithmes de façon à annuler m et n.

Remarque. — Il est évident que la fonction $F(u)$ donnée par la formule (8) n'admet pas nécessairement, d'une manière effective, le pôle $u = 0$: car un des zéros $b_1, b_2, \ldots, b_r$ peut être égal à o ou homologue de o. De même, cette fonction n'admet pas nécessairement le zéro α.

Les deux théorèmes que nous venons d'énoncer admettent la réciproque suivante :

3° *Si l'on considère une expression de la forme*

$$F(u) = B e^{\lambda u} \frac{H(u-b)\,H(u-b_1)\ldots H(u-b_r)}{H(u-a)\,H(u-a_1)\ldots H(u-a_r)},$$

dans laquelle les constantes $\lambda, a, a_1, \ldots, a_r, b, b_1, \ldots, b_r$ *vérifient les deux relations*

$$(10)\quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{2\omega}\operatorname{Log}\mu, \\ b + b_1 + \ldots + b_r - (a + a_1 + \ldots + a_r) = \dfrac{1}{i\pi}(\omega \operatorname{Log}\mu' - \omega' \operatorname{Log}\mu), \end{cases}$$

cette expression $F(u)$ *définit une fonction aux multiplicateurs* μ *et* μ'. C'est ce qu'on vérifie immédiatement en partant des relations fondamentales

$$H(u + 2\omega) = -H(u),$$
$$H(u + 2\omega') = -H(u)e^{-\frac{i\pi}{\omega}(u+\omega')}.$$

Quand les multiplicateurs μ et μ' sont égaux à 1, la fonction

$F(u)$ devient une fonction elliptique, et la deuxième des relations (10) exprime alors le théorème de Liouville (n° 39).

203. Nombre minimum de pôles d'une fonction à multiplicateurs constants. — Nous avons vu qu'une fonction elliptique a, au moins, deux pôles simples ou un pôle double dans un parallélogramme des périodes. Il en est autrement pour les fonctions à multiplicateurs constants.

Quand les multiplicateurs μ et μ' sont quelconques et ne vérifient pas la relation

$$(11) \qquad \frac{1}{i\pi}(\omega \operatorname{Log}\mu' - \omega' \operatorname{Log}\mu) = 0,$$

pour des déterminations convenables des logarithmes, toute fonction aux multiplicateurs μ et μ' admet au moins un pôle simple dans un parallélogramme des périodes.

En effet, si la fonction $F(u)$ donnée par la formule générale (8) n'avait pas de pôles, elle n'aurait pas de zéros, et cette fonction se réduirait à la fonction

$$F(u) = Be^{\lambda u},$$

dont les multiplicateurs

$$\mu = e^{2\lambda\omega}, \qquad \mu' = e^{2\lambda\omega'}$$

vérifient la relation (11) que nous avons écartée.

Il y a donc au moins un pôle. D'ailleurs, il existe des fonctions avec un seul pôle dans un parallélogramme des périodes. Telle est, par exemple, la fonction déjà considérée

$$f(u) = A\frac{H(u-\alpha)}{H(u)}e^{\lambda u},$$

où λ et α sont déterminés par les équations (5). Cette fonction a, comme pôles, le point $u = 0$ et les points homologues. Telle est encore la fonction

$$f(u-v) = A\frac{H(u-v-\alpha)}{H(u-v)}e^{\lambda(u-v)},$$

où v est une constante quelconque; cette fonction admet, comme pôles, le point $u = v$ et les points homologues.

204. **Fonctions à multiplicateurs spéciaux.** — Nous dirons que les multiplicateurs μ et μ' sont *spéciaux* quand ils vérifient une relation de la forme

$$\omega \operatorname{Log} \mu' - \omega' \operatorname{Log} \mu = 0,$$

pour une détermination convenable des logarithmes. Dans ce cas, il existe une fonction *partout finie* dans un parallélogramme des périodes et admettant les deux multiplicateurs : cette fonction est

$$A e^{\lambda u},$$

λ étant déterminé par les deux relations compatibles

$$\lambda = \frac{\operatorname{Log} \mu}{2\omega} = \frac{\operatorname{Log} \mu'}{2\omega'}.$$

La fonction la plus générale $F(u)$ aux multiplicateurs spéciaux μ et μ' est alors

$$F(u) = A e^{\lambda u} \Phi(u),$$

$\Phi(u)$ désignant une *fonction elliptique*. Une fonction elliptique, non réduite à une constante, a au moins deux pôles simples ou un pôle double dans un parallélogramme; donc, si la fonction $F(u)$ ne se réduit pas à une simple exponentielle $A e^{\lambda u}$, elle admet dans un parallélogramme au moins deux pôles simples ou un pôle double. Telles sont les fonctions

$$e^{\lambda u} \operatorname{sn}^2 u, \quad e^{\lambda u}[Z(u-a) - Z(u-b)],$$

II. — Décomposition en éléments simples.

205. **Élément simple.** — Reprenons la fonction

$$f(u) = A \frac{H(u-\alpha)}{H(u)} e^{\lambda u},$$

les constantes λ et α étant déterminées par les équations

$$\lambda = \frac{1}{2\omega} \operatorname{Log} \mu,$$

$$\alpha = \frac{1}{i\pi}(\omega \operatorname{Log} \mu' - \omega' \operatorname{Log} \mu).$$

Écartons le cas des multiplicateurs spéciaux étudié dans le dernier numéro. Alors α n'est pas homologue de zéro et la fonction $f(u)$ devient effectivement infinie au point $u=0$ et aux points homologues. Déterminons la constante A de telle façon que le résidu de $f(u)$ relatif au pôle $u=0$ soit égal à 1. Pour cela, il suffit d'écrire que le produit $u\,f(u)$ est égal à 1 pour $u=0$. On a ainsi

$$1=-\frac{A\,H(\alpha)}{H'(0)}, \qquad A=-\frac{H'(0)}{H(\alpha)}$$

et la fonction $f(u)$ devient

(12) $$f(u)=-\frac{H'(0)\,H(u-\alpha)}{H(\alpha)\,H(u)}e^{\lambda u}.$$

Cette fonction $f(u)$ constitue l'élément simple introduit par M. Hermite pour obtenir la deuxième expression générale des fonctions aux multiplicateurs μ et μ'. Elle vérifie les deux relations

(13) $$\begin{cases} f(u+2\omega) = \mu\,f(u), \\ f(u+2\omega')= \mu'\,f(u); \end{cases}$$

elle admet comme pôle simple le point $u=0$ et les points homologues. Au point $u=0$ son résidu est 1; au point $u=2m\omega+2n\omega'$, m et n étant des entiers quelconques, son résidu est $\mu^m\mu'^n$, comme il résulte de l'équation

$$f(u+2m\omega+2n\omega')=\mu^m\mu'^n f(u),$$

conséquence immédiate des relations (13). Si dans ces relations on change u en $u-v$, v désignant une quantité quelconque indépendante de u, on a aussi

(14) $$\begin{cases} f(u-v+2\omega) = \mu\,f(u-v), \\ f(u-v+2\omega')= \mu'\,f(u-v). \end{cases}$$

La fonction

(15) $$f(u-v)=-\frac{H'(0)\,H(u-v-\alpha)}{H(\alpha)\,H(u-v)}e^{\lambda(u-v)},$$

regardée comme fonction de u, a donc les mêmes multiplicateurs μ et μ' que $f(u)$: elle admet comme pôles simples le point $u=v$ et les points homologues, le point $u=v$ avec le résidu $+1$.

Il est intéressant de voir quelles sont les propriétés de cette même fonction $f(u-v)$ considérée comme fonction de v. Si dans les relations (14) on change u en $u-2\omega$ on obtient deux nouvelles relations que nous écrirons comme il suit

$$f(u-v-2\omega) = \frac{1}{\mu} f(u-v),$$

$$f(u-v-2\omega') = \frac{1}{\mu'} f(u-v).$$

Ces relations montrent que $f(u-v)$ considéré comme fonction de v est une fonction aux multiplicateurs inverses $\frac{1}{\mu}$ et $\frac{1}{\mu'}\cdot$ Cette fonction de v admet comme pôles simples le point $v=u$ et les points homologues, le point $v=u$ avec le résidu -1. On vérifie, en effet, immédiatement, que le produit $(v-u)f(u-v)$ tend vers -1 quand v tend vers u.

206. **Formule de décomposition. Cas des pôles simples.** — Soit une fonction $F(u)$ aux multiplicateurs non spéciaux μ et μ'. Supposons d'abord que cette fonction n'ait que des pôles simples homologues respectivement de certains points

$$u=a, \quad u=b, \quad \ldots, \quad u=l,$$

et soient

$$A, \quad B, \quad \ldots, \quad L$$

les résidus de $F(u)$ aux points $a, b, \ldots, l$.

Considérons la différence

$$\Psi(u) = F(u) - A\,f(u-a) - B\,f(u-b) - \ldots - L\,f(u-l).$$

Nous allons montrer que cette différence est *identiquement nulle*. En effet, $\Psi(u)$ est une fonction aux multiplicateurs μ et μ', car elle est une somme de fonctions $F(u)$, $-A\,f(u-a)$, ... admettant séparément ces multiplicateurs. En outre, cette fonction $\Psi(u)$ est *finie* pour toutes les valeurs de u, car, dans le voisinage de $u=a$, par exemple, on a, par hypothèse,

$$F(u) = \frac{A}{u-a} + \text{fonction régulière};$$

de plus, d'après les propriétés de la fonction $f(u-v)$, on a, dans le voisinage de $u=a$,

$$f(u)=\frac{1}{u-a}+\text{fonction régulière};$$

enfin les autres termes $f(u-b)\ldots f(u-l)$ sont des fonctions régulières au point $u=a$. Dans la combinaison qui donne $\Psi(u)$ les termes en $\frac{1}{u-a}$ disparaissent et $\Psi(u)$ est finie pour $u=a$. Il en est de même des autres points $u=b, \ldots, u=l$ et des points homologues.

Ainsi $\Psi(u)$ est une fonction aux multiplicateurs non spéciaux μ et μ', *n'admettant plus aucun pôle* à distance finie. Mais une telle fonction ne peut pas exister (n° 203) : donc $\Psi(u)$ est *identiquement nulle*. On a alors la formule

$$(16)\qquad F(u)=A\,f(u-a)+B\,f(u-b)+\ldots+L\,f(u-l).$$

C'est la formule de décomposition en éléments simples, mettant en évidence les pôles non homologues $a, b, \ldots, l$ et les résidus correspondants. Chaque terme de cette formule est une fonction de u aux multiplicateurs μ et μ' admettant dans un parallélogramme un seul pôle simple.

Inversement toute expression de la forme (16) dans laquelle a, $b, \ldots, l$ sont des points non homologues deux à deux et A, B, ..., L des constantes quelconques, est une fonction aux multiplicateurs μ et μ', ayant comme pôles les points $a, b, \ldots, l$ et leurs homologues, les résidus relatifs aux points $a, b, \ldots, l$ étant A, B, ..., L.

D'après cela, on peut choisir arbitrairement les résidus A, B, ..., L : il n'existe entre eux aucune relation nécessaire. Il y a donc là une différence avec les fonctions elliptiques pour lesquelles la somme des résidus est nulle.

Exemple de décomposition. — Soit

$$(17)\qquad F(u)=\frac{H^2(u)}{H(u-a)\,H(u-b)},$$

a et b étant deux constantes non homologues entre elles et non

homologues de o. Cette fonction admet les multiplicateurs

$$\mu = 1, \qquad \mu' = e^{-\frac{i\pi}{\omega}(a+b)},$$

comme il résulte des propriétés fondamentales de la fonction H; elle admet comme pôles les points a et b et les points homologues.

Construisons l'élément simple correspondant

$$f(u) = -\frac{H'(0)\,H(u-\alpha)}{H(\alpha)\,H(u)}\,e^{\lambda u},$$

en choisissant λ et α de façon que cette fonction admette les mêmes multiplicateurs μ et μ'. Il suffit de prendre

$$\lambda = 0, \qquad \alpha = -(a+b);$$

l'élément simple est donc

$$f(u) = \frac{H'(0)\,H(u+a+b)}{H(a+b)\,H(u)}.$$

Les résidus de la fonction à décomposer $F(u)$, relatifs aux deux pôles non homologues a et b, sont

$$A = \frac{H^2(a)}{H'(0)\,H(a-b)}, \qquad B = \frac{H^2(b)}{H'(0)\,H(b-a)};$$

pour les obtenir, il suffit de chercher les limites des deux produits $(u-a)F(u)$ et $(u-b)F(u)$ pour $u=a$ et $u=b$.

La formule de décomposition est donc

$$F(u) = A\,f(u-a) + B\,f(u-b),$$

ou, en écrivant tous les termes explicitement

$$\frac{H^2(u)}{H(u-a)\,H(u-b)} = \frac{1}{H(a+b)\,H(a-b)}\left[\frac{H^2(a)\,H(u+b)}{H(u-a)} - \frac{H^2(b)\,H(u+a)}{H(u-b)}\right].$$

207. **Cas des pôles multiples.** — Le même raisonnement nous donnera la formule dans le cas des pôles multiples. Supposons que la fonction $F(u)$ aux multiplicateurs *non spéciaux* μ et μ' ad-

mette comme pôles les points a, b, ..., l non homologues; et supposons que les parties principales relatives à ces pôles soient respectivement

$$\varphi_1(u) = \frac{A}{u-a} + \frac{A_1}{(u-a)^2} + \frac{A_2}{(u-a)^3} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{(u-a)^\alpha},$$

$$\varphi_2(u) = \frac{B}{u-b} + \frac{B_1}{(u-b)^2} + \frac{B_2}{(u-b)^3} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{(u-b)^\beta},$$

....

Si l'on désigne par f', f'', ... les dérivées successives de $f(u)$, la différence

$$\begin{aligned}\Psi(u) = F(u) &- \Big[A\,f(u-a) - A_1 f'(u-a) + \frac{A_2}{1.2} f''(u-a) \\ &\qquad + (-1)^{\alpha-1} \frac{A_{\alpha-1}}{1.2\ldots\alpha-1} f^{(\alpha-1)}(u-a)\Big] \\ &- \Big[B\,f(u-b) - B_1 f'(u-b) + \frac{B_2}{1.2} f''(u-b) \\ &\qquad + (-1)^{\beta-1} \frac{B_{\beta-1}}{1.2\ldots\beta-1} f^{(\beta-1)}(u-b)\Big] \\ &- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

est encore *identiquement nulle* : en effet, dans le voisinage de $u = a$ par exemple, on a

$$f(u-a) = \frac{1}{u-a} + \text{fonction régulière},$$

$$f'(u-a) = -\frac{1}{(u-a)^2} + \text{fonction régulière},$$

$$f''(u-a) = \frac{1.2}{(u-a)^3} + \text{fonction régulière},$$

....,

$$f^{(\alpha-1)}(u-a) = (-1)^{\alpha-1} \frac{1.2\ldots(\alpha-1)}{(u-a)^\alpha} + \text{fonction régulière}.$$

Donc

$$\begin{aligned}&A\,f(u-a) - A_1 f'(u-a) + \frac{A_2}{1.2} f''(u-a) + \ldots \\ &+ \frac{(-1)^{\alpha-1} A_{\alpha-1}}{1.2\ldots\alpha-1} f^{(\alpha-1)}(u-a) = \varphi_1(u) + \text{fonction régulière}.\end{aligned}$$

Comme dans le voisinage de $u = a$, on a aussi, par hypothèse,

$$F(u) = \varphi_1(u) + \text{fonction régulière};$$

on voit que $\Psi(u)$ est régulière au point a; il en est de même des autres points $b, \ldots, l$ et des points homologues. Cette différence $\Psi(u)$ est donc une fonction aux multiplicateurs *non spéciaux* μ *et* μ' *n'ayant plus aucun pôle à distance finie*. Comme une telle fonction ne peut pas exister (n° 203), $\Psi(u)$ est identiquement nulle et l'on a la formule de décomposition

$$(18) \quad \begin{cases} F(u) = \sum \Big[A f(u-a) - A_1 f'(u-a) + \ldots \\ \qquad + \dfrac{(-1)^{\alpha-1}}{1.2\ldots\alpha-1} f^{(\alpha-1)}(u-a) \Big], \end{cases}$$

la somme étant étendue à tous les pôles non homologues.

Réciproquement, toute expression de cette forme, dans laquelle les coefficients $A, A_1, \ldots, A_{\alpha-1}, \ldots$ sont choisis arbitrairement, est une fonction aux multiplicateurs μ et μ'.

On voit l'analogie de cette formule avec celle que M. Hermite a donnée pour les fonctions elliptiques et que nous avons établie au n° 26 par un raisonnement presque identique.

Exemple. — Prenons, par exemple, la fonction (17) de la page 335, en y faisant $b = a$,

$$F(u) = \frac{H^2(u)}{H^2(u-a)}.$$

Cette fonction admet les multiplicateurs

$$\mu = 1, \qquad \mu' = e^{-\frac{2i\pi a}{\omega}};$$

elle a comme unique pôle double le point $u = a$ et les points homologues. Dans le voisinage du point $u = a$, on a, par la formule de Taylor,

$$H(u) = H(a) + (u-a) H'(a) + \ldots,$$

$$H(u-a) = (u-a) H'(0) + \frac{(u-a)^3}{1.2.3} H'''(0) + \ldots,$$

car $H(u)$ étant impaire, $H(o)$, $H''(o)$ sont nulles. Donc

$$\frac{H(u)}{H(u-a)} = \frac{1}{(u-a)H'(o)} \frac{H(a)+(u-a)H'(a)+\ldots}{1+\dfrac{(u-a)^2}{6}\dfrac{H'''(o)}{H'(o)}+\ldots}$$

$$= \frac{1}{(u-a)H'(o)}[H(a)+(u-a)H'(a)+\ldots].$$

En élevant au carré, on a enfin

$$\frac{H^2(u)}{H^2(u-a)} = \frac{1}{(u-a)^2}\frac{H^2(a)}{H'^2(o)} + \frac{2}{(u-a)}\frac{H(a)H'(a)}{H'^2(o)}+\ldots,$$

les termes non écrits formant une fonction régulière au point a. On a ainsi mis en évidence la partie principale de $F(u)$ au pôle a. L'élément simple avec les multiplicateurs μ et μ' est actuellement

$$f(u) = \frac{H'(o)H(u+2a)}{H(2a)H(u)}.$$

La formule de décomposition est enfin

$$F(u) = \frac{2H(a)H'(a)}{H'^2(o)}f(u-a) - \frac{H^2(a)}{H'^2(o)}f'(u-a).$$

208. **Méthode de M. Hermite.** — Pour établir la formule de décomposition, nous avons suivi une marche analogue à celle que nous avons employée pour les fonctions elliptiques (nos 24 et 26). M. Hermite établit cette formule par la méthode suivante, que nous indiquons à titre d'exercice :

Soit $F(u)$ une fonction aux multiplicateurs non spéciaux μ et μ'; désignons par v une variable auxiliaire et considérons la fonction de v

$$\Phi(v) = F(v)f(u-v).$$

Cette fonction est *doublement périodique :* car, si l'on augmente v de l'une des périodes, $F(v)$ se reproduit multiplié par μ ou μ' et $f(u-v)$ multiplié par $\frac{1}{\mu}$ ou $\frac{1}{\mu'}$; donc le produit $\Phi(v)$ ne change pas. La fonction $\Phi(v)$ est donc une fonction elliptique. En écrivant que la somme des résidus de $\Phi(v)$ relatifs aux pôles situés dans un parallélogramme ou, ce qui revient au même, relatifs aux pôles non homologues, est nulle (no 25), on obtiendra la formule cherchée.

Les infinis de $\Phi(v)$ sont les infinis des deux facteurs $F(v)$ et $f(u-v)$: les infinis de $F(v)$ sont homologues des points

$$a, \quad b, \quad \ldots, \quad l;$$

ceux de $f(u-v)$ sont homologues du point u. Supposons, pour simplifier, les pôles de $F(v)$ simples et soient A, B, ..., L les résidus de F correspondant aux pôles a, b, ..., l. Les résidus de $\Phi(v)$, relatifs à ces pôles, sont

$$A f(u-a), \quad B f(u-b), \quad \ldots, \quad L f(u-l).$$

Le résidu de $\Phi(v)$ relatif au pôle $v = u$ est

$$-F(u).$$

Écrivant que la somme de ces résidus est nulle, on a bien la formule cherchée.

Nous laissons au lecteur le soin d'appliquer la même méthode au cas des pôles multiples.

209. **Multiplicateurs spéciaux.** — Dans ce qui précède, nous avons écarté le cas où les multiplicateurs μ et μ' vérifieraient, pour des déterminations convenables de $\operatorname{Log}\mu$ et $\operatorname{Log}\mu'$, la relation

$$\omega \operatorname{Log}\mu' - \omega' \operatorname{Log}\mu = 0.$$

Supposons maintenant cette relation remplie : il existe alors une exponentielle de la forme

$$e^{\lambda u}$$

admettant ces deux multiplicateurs, car les deux équations

$$\mu = e^{2\lambda\omega}, \qquad \mu' = e^{2\lambda\omega'}$$

donnent pour λ des valeurs compatibles. Cette fonction

$$e^{\lambda u}$$

est une fonction n'ayant aucun pôle à distance finie. L'élément simple appelé $f(u)$ n'existe plus dans ce cas, car la constante α est homologue du point 0. Donc les formules de décomposition générale ne s'appliquent pas à ce cas.

Mais, actuellement, toute fonction $F(u)$ aux multiplicateurs

spéciaux μ et μ' peut s'écrire

$$F(u) = e^{\lambda u}\,\Phi(u),$$

$\Phi(u)$ étant une fonction elliptique. Il suffira de décomposer cette fonction $\Phi(u)$ en éléments simples par les formules des n°s 24 et 26, et il en résultera une formule donnant $F(u)$. Par exemple, supposons que $F(u)$ ait seulement des pôles simples homologues des points

$$a, \quad b, \quad \ldots, \quad l,$$

les résidus relatifs aux points $a, b, \ldots, l$ étant

$$A, \quad B, \quad \ldots, \quad L.$$

La fonction elliptique

$$\Phi(u) = e^{-\lambda u}\,F(u)$$

admet les mêmes pôles avec les résidus

$$e^{-\lambda a}A, \quad e^{-\lambda b}B, \quad \ldots, \quad e^{-\lambda l}L.$$

On a donc, d'après la formule (31) du n° 24,

$$\Phi(u) = C_0 + e^{-\lambda a}A\,Z(u-a) + e^{-\lambda b}B\,Z(u-b) + \ldots + e^{-\lambda l}L\,Z(u-l);$$

en outre, la somme des résidus de la fonction elliptique Φ étant nulle, on a, entre les pôles et les résidus de F, la relation

$$(19) \qquad A e^{-\lambda a} + B e^{-\lambda b} + \ldots + L e^{-\lambda l} = 0.$$

Revenant à la fonction donnée F par la formule

$$F(u) = e^{\lambda u}\,\Phi(u),$$

on a enfin la formule

$$F(u) = C_0 e^{\lambda u} + A e^{\lambda(u-a)}\,Z(u-a) + B e^{\lambda(u-b)}\,Z(u-b) + \ldots + L e^{\lambda(u-l)}\,Z(u-l).$$

On pourrait donc prendre actuellement comme élément simple la fonction

$$\varphi(u) = e^{\lambda u}\,Z(u)$$

et écrire

$$F(u) = C_0 e^{\lambda u} + A\,\varphi(u-a) + B\,\varphi(u-b) + \ldots + L\,\varphi(u-l).$$

Il est important de remarquer que, si les multiplicateurs sont spéciaux, les résidus ne peuvent plus être choisis arbitrairement : ils sont liés aux pôles correspondants par une relation, qui a la forme (19) quand tous les pôles sont simples.

III. — Équation de Lamé. Équations de M. Picard.

210. Équation de Lamé. — Une application des plus importantes des fonctions doublement périodiques de seconde espèce, ou fonctions à multiplicateurs constants, est l'intégration d'une classe d'équations différentielles linéaires et homogènes ayant pour coefficients des fonctions elliptiques.

La première équation de ce genre a été considérée par Lamé à propos de l'équilibre des températures dans un ellipsoïde homogène. Cette équation, appelée *équation de Lamé,* a d'abord été prise par Lamé sous la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2}=[n(n+1)k^2\,\mathrm{sn}^2x+h]y,$$

k étant le module, n un entier et h une constante. Lamé s'est borné à intégrer cette équation *pour des valeurs particulières* de h choisies de telle façon que l'équation admette une solution qui soit un polynome entier en $\mathrm{sn}\,x$, ou un polynome entier en $\mathrm{sn}\,x$ multiplié par l'un des trois facteurs $\mathrm{cn}\,x$, $\mathrm{dn}\,x$ ou $\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x$.

Par exemple, quand $n=1$, l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(2k^2\,\mathrm{sn}^2x+h)y,$$

admet la solution

$$y=\mathrm{sn}\,x,$$

pour $h=-(1+k^2)$, et la solution

$$y=\mathrm{cn}\,x,$$

pour $h=-1$.

M. Hermite, se plaçant dans le cas général où h est quelconque, a montré que l'équation de Lamé peut toujours être intégrée et que son intégrale générale est de la forme

$$y=\mathrm{C}\,\mathrm{F}(x)+\mathrm{C}'\,\mathrm{F}(-x),$$

$F(x)$ étant une fonction à multiplicateurs constants, C et C′ deux constantes arbitraires.

211. Forme de l'équation de Lamé dans les notations de M. Weierstrass. — Si dans l'équation

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h,$$

on fait le changement de variable

$$x = \frac{u}{\lambda} + iK',$$

u désignant la nouvelle variable et λ une constante, et si l'on se reporte à la formule

$$\operatorname{sn}\left(\frac{u}{\lambda} + iK'\right) = \frac{1}{k \operatorname{sn} \frac{u}{\lambda}},$$

l'équation devient

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{du^2} = \frac{n(n+1)}{\lambda^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u}{\lambda}} + h.$$

Introduisons maintenant la fonction pu par la formule (n° 97)

$$\frac{1}{\lambda^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u}{\lambda}} = p(u \mid 2\omega, 2\omega') + \frac{1+k^2}{3\lambda^2},$$

nous obtenons l'équation

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{du^2} = n(n+1)\,pu + l,$$

où l est une constante. C'est là la forme de l'équation de Lamé dans la notation de M. Weierstrass, telle que nous l'avons rencontrée au n° 194.

212. Intégration de l'équation de Lamé pour $n = 1$. — Nous allons exposer la méthode de M. Hermite pour le cas de $n = 1$, qui, d'après les recherches de M. Hermite, se présente dans l'étude des mouvements à la Poinsot. Nous rattacherons ensuite le cas où n est un entier quelconque à un théorème de M. Picard.

L'équation de Lamé, pour $n = 1$, peut s'écrire

$$(20) \qquad \frac{1}{y}\frac{d^2y}{du^2} = 2pu + l.$$

Essayons de la vérifier par la fonction à multiplicateurs constants

$$y_1 = \frac{\sigma(u+a)}{\sigma u} e^{\lambda u},$$

a et λ désignant des constantes. Nous avons, en prenant les dérivées logarithmiques des deux membres

$$\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{du} = \zeta(u+a) - \zeta u + \lambda,$$

et en dérivant de nouveau

$$\frac{1}{y_1}\frac{d^2y_1}{du^2} - \left(\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{du}\right)^2 = pu - p(u+a).$$

Mais d'après la formule d'addition pour ζu (n° 44) la valeur de $\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{du}$ peut s'écrire

$$\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{du} = \zeta a + \lambda + \frac{1}{2}\frac{p'u - p'a}{pu - pa};$$

puis, d'après la deuxième formule d'addition pour pu (n° 45), on a

$$p(u+a) = \frac{1}{4}\left(\frac{p'u - p'a}{pu - pa}\right)^2 - pu - pa.$$

On a donc enfin

$$\frac{1}{y_1}\frac{d^2y_1}{du^2} = 2pu + pa - \frac{1}{4}\left(\frac{p'u - p'a}{pu - pa}\right)^2 + \left(\zeta a + \lambda + \frac{1}{2}\frac{p'u - p'a}{pu - pa}\right)^2.$$

Pour que le second membre devienne égal à $2pu + l$, on voit qu'il suffit de faire

$$pa = l, \qquad \lambda = -\zeta a.$$

Ainsi l'équation (20) admet la solution

$$y_1 = \frac{\sigma(u+a)}{\sigma u} e^{-u\zeta a},$$

à condition que la constante a soit déterminée par l'équation

$$(21) \qquad pa = l.$$

Comme l'équation différentielle ne change pas quand on change u en $-u$, elle admet également la deuxième solution

$$y_2 = \frac{\sigma(u-a)}{\sigma u} e^{u\zeta a},$$

qui s'obtient aussi en changeant le signe de a, ce qui est évident d'après l'équation (21) dont le premier membre est une fonction paire de a.

L'équation de Lamé pour $n = 1$ admet donc l'intégrale générale

$$y = C_1 \frac{\sigma(u+a)}{\sigma u} e^{-u\zeta a} + C_2 \frac{\sigma(u-a)}{\sigma u} e^{u\zeta a},$$

C_1 et C_2 désignant deux constantes arbitraires.

213. **Équations de M. Picard.** — L'équation de Lamé rentre dans une classe d'équations différentielles linéaires et homogènes qui peuvent être intégrées à l'aide des fonctions à multiplicateurs constants, comme l'a montré M. Picard (*Comptes rendus*, 1880, 1er semestre.

Soit une équation linéaire d'ordre n de la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} + f_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + f_2(x) \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + f_n(x) y = 0,$$

dont les coefficients $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ sont des fonctions elliptiques aux mêmes périodes 2ω et $2\omega'$; supposons en outre que l'on sache que l'intégrale générale est uniforme en x et n'admette pas d'autres singularités que des pôles à distance finie.

Dans ces conditions, l'équation est intégrable à l'aide de fonctions à multiplicateurs constants.

Pour le démontrer, supposons l'équation du troisième ordre

$$(22) \qquad \frac{d^3 y}{dx^3} + f_1(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + f_2(x) \frac{dy}{dx} + f_3(x) y = 0.$$

Le raisonnement que nous allons employer s'appliquera à une équation d'un ordre quelconque.

Le point de départ est dans ce fait que quatre solutions quelconques y_1, y_2, y_3, y_4 de l'équation du troisième ordre (22) sont liées par une relation linéaire et homogène à coefficients constants de la forme

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4 = 0.$$

Soit alors

$$y_1 = \varphi(x)$$

une intégrale de l'équation : par hypothèse, c'est une fonction uniforme de x. Comme l'équation différentielle ne change pas quand on change x en $x + 2\omega$, elle admet aussi les intégrales

$$y_2 = \varphi(x + 2\omega), \qquad y_3 = \varphi(x + 4\omega), \qquad y_4 = \varphi(x + 6\omega).$$

Entre ces quatre fonctions a lieu, quel que soit x, une relation de la forme

$$(23) \quad C_1 \varphi(x) + C_2 \varphi(x + 2\omega) + C_3 \varphi(x + 4\omega) + C_4 \varphi(x + 6\omega) = 0.$$

En supposant C_4 différent de zéro et divisant par C_4, on a

$$(24) \qquad \varphi(x + 6\omega) = c_1 \varphi(x) + c_2 \varphi(x + 2\omega) + c_3 \varphi(x + 4\omega),$$

c_1, c_2, c_3 désignant des constantes déterminées. Considérons alors la fonction

$$(25) \qquad \psi(x) = \lambda_1 \varphi(x) + \lambda_2 \varphi(x + 2\omega) + \lambda_3 \varphi(x + 4\omega),$$

où λ_1, λ_2, λ_3 sont des constantes arbitraires. Cette fonction est une intégrale de l'équation : nous allons montrer que l'on peut déterminer les rapports de ces constantes λ de telle façon que

$$(26) \qquad \psi(x + 2\omega) = \mu \psi(x),$$

μ étant une constante convenablement choisie. En effet cette dernière relation s'écrit, en vertu des précédentes (24) et (25)

$$\lambda_1 \varphi(x + 2\omega) + \lambda_2 \varphi(x + 4\omega) + \lambda_3 [c_1 \varphi(x) + c_2 \varphi(x + 2\omega) + c_3 \varphi(x + 4\omega)]$$
$$= \mu [\lambda_1 \varphi(x) + \lambda_2 \varphi(x + 2\omega) + \lambda_3 \varphi(x + 4\omega)];$$

d'où, en égalant les coefficients de $\varphi(x)$, $\varphi(x + 2\omega)$, $\varphi(x + 4\omega)$,

$$(27) \qquad \begin{cases} \mu \lambda_1 \qquad\quad - c_1 \lambda_3 = 0, \\ -\lambda_1 + \mu \lambda_2 - c_2 \lambda_3 = 0, \\ -\lambda_2 + (\mu - c_3) \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

L'élimination de λ_1, λ_2, λ_3 entre ces équations donne, pour déterminer μ, l'équation du troisième degré

(28) $$\mu^3 - c_3\mu^2 - c_2\mu - c_1 = 0.$$

Après que l'on aura pris pour μ une racine de cette équation, on tirera des équations (27) devenues compatibles les rapports de deux des quantités λ_1, λ_2, λ_3 à la troisième, et l'on aura ainsi une intégrale $\psi(x)$ telle que

$$\psi(x + 2\omega) = \mu\,\psi(x).$$

En partant maintenant de cette intégrale, comme nous sommes partis de $\varphi(x)$, on montrera que l'on peut déterminer des coefficients constants λ'_1, λ'_2, λ'_3 de telle façon que l'intégrale

$$F(x) = \lambda'_1\,\psi(x) + \lambda'_2\,\psi(x + 2\omega') + \lambda'_3\,\psi(x + 4\omega')$$

vérifie une relation de la forme

$$F(x + 2\omega') = \mu'\,F(x).$$

D'ailleurs cette fonction $F(x)$ vérifie évidemment la relation

$$F(x + 2\omega) = \mu\,F(x),$$

puisqu'elle est une somme de trois fonctions ψ qui la vérifient séparément.

On a donc démontré que l'équation possède *au moins* une intégrale $F(x)$ admettant deux multiplicateurs constants. Supposons cette intégrale trouvée : alors, conformément à la théorie générale des équations linéaires, on fera le changement de fonction

$$y = F(x)\int z\,dx, \qquad z = \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{F(x)}\right),$$

z étant la nouvelle fonction inconnue. Cette fonction z vérifie une équation du second ordre

(29) $$\frac{d^2 z}{dx^2} + g_1(x)\frac{dz}{dx} + g_2(x)z = 0,$$

dont les coefficients sont *doublement périodiques,* comme formés rationnellement avec les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$ qui sont dou-

blement périodiques et les quotients

$$\frac{F'(x)}{F(x)}, \quad \frac{F''(x)}{F(x)},$$

qui le sont également. En outre, l'intégrale générale y de l'équation donnée étant supposée être uniforme et n'avoir que des pôles à distance finie, la nouvelle fonction

$$z = \frac{d}{dx}\left[\frac{y}{F(x)}\right]$$

possède les mêmes propriétés. L'équation différentielle en z possède donc les propriétés caractéristiques des équations de M. Picard : elle admet au moins une intégrale qui est une fonction à multiplicateurs constants. On l'abaissera par le même procédé à une équation du premier ordre qui s'intégrera par une fonction à multiplicateurs constants.

Remarque. — Nous avons supposé, dans notre raisonnement, C_4 différent de zéro. Si C_4 était nul (équation 23), on aurait

$$C_1\,\varphi(x) + C_2\,\varphi(x+2\omega) + C_3\,\varphi(x+4\omega) = 0.$$

Alors on supposerait C_3 différent de zéro et l'on aurait

$$\varphi(x+4\omega) = c_1\,\varphi(x) + c_2\,\varphi(x+2\omega);$$

on poserait

$$\psi(x) = \lambda_1\,\varphi(x) + \lambda_2\,\varphi(x+2\omega)$$

et on déterminerait le rapport $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ par la condition

$$\psi(x+2\omega) = \mu\,\psi(x),$$

μ désignant une constante. Les conclusions sont donc les mêmes.

Le cadre de cet Ouvrage ne nous permet pas d'entrer dans le détail des divers cas qui peuvent se présenter. Nous renverrons le lecteur aux Mémoires de M. Picard (*Journal de Crelle,* t. 90) et de M. Floquet (*Annales de l'École Normale,* 3e série, t. I, 1884).

214. **Retour à l'équation de Lamé.** — Prenons comme exemple l'équation de Lamé

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{du^2} = n(n+1)\,pu + l,$$

où n est un entier que l'on peut toujours supposer *positif*, car l'équation ne change pas par le changement de n en $(-n-1)$. Il résulte des théorèmes sur les équations linéaires établis par M. Fuchs [1] que cette équation a, quel que soit l, une intégrale générale uniforme ne possédant d'autres singularités que des pôles à distance finie. On peut donc affirmer, d'après le théorème de M. Picard, que cette équation est intégrable à l'aide des fonctions à multiplicateurs constants. Voyons quels seront les pôles de ces fonctions et leur ordre de multiplicité.

Soit $u = a$ un pôle, d'ordre α, d'une intégrale y; on a, dans le voisinage de ce point,

$$y = C(u-a)^{-\alpha}[1 + A_1(u-a) + A_2(u-a)^2 + \ldots],$$

C, A_1, A_2 désignant des constantes. On en conclut

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{du} = -\frac{\alpha}{u-a} + \frac{A_1 + 2A_2(u-a) + \ldots}{1 + A_1(u-a) + \ldots},$$

ou, en développant le second rapport suivant les puissances de $u-a$,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{du} = -\frac{\alpha}{u-a} + A_1 + B_1(u-a) + \ldots$$

Différentions par rapport à u; il vient

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{du^2} - \left(\frac{1}{y}\frac{dy}{du}\right)^2 = \frac{\alpha}{(u-a)^2} + B_1 + \ldots,$$

et, en remplaçant $\frac{1}{y}\frac{dy}{du}$ par sa valeur,

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{du^2} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(u-a)^2} - \frac{2\alpha A_1}{u-a} + \ldots.$$

D'après l'équation de Lamé, ceci doit être égal à

$$n(n+1)\,pu + l.$$

Comme les seuls pôles de pu sont 0 et les points homologues, a doit être égal à 0 ou homologue de 0. Comme la partie prin-

[1] *Journal de Crelle*, t. 66, p. 121.

cipale de pu dans le voisinage d'un de ses pôles est

$$\frac{1}{(u-a)^2},$$

on doit avoir

$$\alpha(\alpha+1) = n(n+1), \qquad \alpha A_1 = 0.$$

La première relation exige, puisque α et n sont positifs,

$$\alpha = n$$

et la seconde

$$A_1 = 0.$$

Ainsi une intégrale quelconque de l'équation de Lamé admet, comme seuls pôles, les points homologues de 0 : tous ces pôles sont d'ordre n. Nous savons d'autre part que l'équation de Lamé admet au moins une intégrale y_1 qui est une fonction à multiplicateurs constants. D'après la formule (8) du n° 202, qui donne une fonction à multiplicateurs constants comme le quotient de deux produits de fonctions H mettant en évidence les pôles et les zéros, cette intégrale y_1 est nécessairement de la forme

$$y_1 = A\, e^{\lambda x} \frac{H(x+a_1)\, H(x+a_2) \ldots H(x+a_n)}{H^n(x)}$$

ou, avec les notations de M. Weierstrass,

$$y_1 = B e^{\lambda x} \frac{\sigma(x+a_1)\, \sigma(x+a_2) \ldots \sigma(x+a_n)}{\sigma^n(x)}.$$

Il reste à déterminer les constantes

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \lambda,$$

de façon que cette fonction vérifie l'équation de Lamé; c'est ce que l'on fera par un calcul analogue à celui que nous avons développé (n° 212) pour le cas simple de $n=1$.

L'équation admettra une deuxième intégrale, y_2 déduite de y_1 par le changement de x en $-x$. On retrouve ainsi les résultats de M. Hermite.

CHAPITRE XII.

FONCTIONS A MULTIPLICATEURS EXPONENTIELS OU FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES DE TROISIÈME ESPÈCE.

215. **Définition.** — M. Hermite a appelé *fonction doublement périodique de troisième espèce* une fonction uniforme n'admettant d'autres singularités que des pôles à distance finie et vérifiant deux équations de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} \varphi(x+2\omega) = e^{ax+b}\varphi(x), \\ \varphi(x+2\omega') = e^{a'x+b'}\varphi(x), \end{cases}$$

a, b, a', b' désignant des constantes. Les facteurs e^{ax+b} et $e^{a'x+b'}$, par lesquels la fonction est multipliée quand l'argument croît d'une période, sont les *multiplicateurs* de la fonction : ces multiplicateurs sont actuellement des exponentielles linéaires en x. L'étude de ces fonctions a été faite par M. Hermite (*Comptes rendus*, 1861 et 1862; *Journal de Crelle*, t. 100); par M. Biehler (*Thèse de Doctorat*, 1879) et par M. Appell (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. I, II, III et V). Des exemples simples de ce genre de fonctions sont fournis immédiatement par les fonctions σ, H, Θ, ... D'une manière générale, la fonction

$$(2)\qquad \varphi(x) = \text{A}\, e^{\alpha x^2+\beta x}\frac{\text{H}(x-b_1)\,\text{H}(x-b_2)\ldots\text{H}(x-b_p)}{\text{H}(x-a_1)\,\text{H}(x-a_2)\ldots\text{H}(x-a_q)},$$

où le nombre p des fonctions H au numérateur est différent du nombre q des mêmes fonctions au dénominateur, est une fonction doublement périodique de troisième espèce. Nous verrons plus loin que, réciproquement, toute fonction doublement périodique de troisième espèce peut être mise sous cette forme. Nous donnerons encore deux expressions principales de ces fonctions : l'une, par un quotient tel que (2) de deux produits de fonction H,

mettant en évidence les zéros et les pôles; l'autre, par une somme d'éléments simples, mettant en évidence les pôles et les parties principales correspondantes.

216. **Simplification des relations que vérifie une fonction à multiplicateurs exponentiels.** — Soit une fonction $\varphi(x)$ telle que

$$\varphi(x+2\omega) = e^{ax+b}\varphi(x),$$
$$\varphi(x+2\omega') = e^{a'x+b'}\varphi(x).$$

Posons, en désignant par λ et μ des constantes,

$$f(x) = e^{\lambda x^2+\mu x}\varphi(x).$$

On peut toujours déterminer λ et μ de façon que $f(x)$ admette la période 2ω, c'est-à-dire ne change pas de valeur quand x croît de 2ω. En effet on a

$$\frac{f(x+2\omega)}{f(x)} = e^{4\lambda\omega x+4\lambda\omega^2+2\mu\omega+ax+b},$$

et pour rendre cette exponentielle égale à 1, il suffit de déterminer λ et μ par les deux équations du premier degré

$$(3) \qquad 4\lambda\omega = -a, \qquad 4\lambda\omega^2+2\mu\omega = -b.$$

La fonction $f(x)$ vérifie alors deux relations de la forme

$$(4) \qquad \begin{cases} f(x+2\omega) = f(x), \\ f(x+2\omega') = e^{Ax+B}f(x), \end{cases}$$

A et B désignant deux constantes dont la première a pour valeur

$$A = 4\lambda\omega'+a' = \frac{\omega a' - a\omega'}{\omega}.$$

Comme la fonction $f(x)$ admet la période 2ω, les deux membres de la seconde relation (4) ne doivent pas changer quand x croît de 2ω : on a donc

$$e^{2A\omega} = 1, \qquad 2A\omega = -2N\pi i,$$

N désignant un entier positif ou négatif. Les relations (4) s'é-

crivent alors

$$f(x+2\omega)=f(x),$$

$$f(x+2\omega')=e^{-\frac{N i\pi x}{\omega}+B} f(x).$$

Si l'entier N était *nul* la fonction $f(x)$ serait une fonction aux multiplicateurs constants 1 et e^B, fonctions que nous venons d'étudier. Nous supposerons donc N différent de zéro. Dans cette hypothèse, on peut encore simplifier un peu les relations ci-dessus, en prenant comme nouvelle variable

$$u=x-\frac{B\omega}{N i\pi}$$

et posant

$$F(u)=f\left(u+\frac{B\omega}{N i\pi}\right).$$

Cette fonction $F(u)$ vérifie alors les deux relations

$$(5)\qquad \begin{cases} F(u+2\omega)=F(u), \\ F(u+2\omega')=e^{-\frac{N i\pi u}{\omega}} F(u). \end{cases}$$

C'est à cette forme simple que nous supposerons toujours que l'on ait ramené les deux relations vérifiées par une fonction doublement périodique de troisième espèce.

217. Exemple du cas N = 1. — La fonction

$$(6)\qquad E(u)=\frac{1}{\sqrt[4]{q}}e^{\frac{\pi u i}{2\omega}} H_1(u)=-\frac{1}{\sqrt[4]{q}}e^{\frac{\pi u i}{2\omega}} H(u-\omega)$$

est une fonction régulière en tous les points à distance finie ou ce que l'on appelle encore une *fonction entière* de u, car elle se comporte comme un polynome en tous les points à distance finie. D'après les propriétés de la fonction H_1, on a

$$H_1(u+2\omega)=-H_1(u),$$

$$H_1(u+2\omega')=e^{-\frac{i\pi}{\omega}(u+\omega')} H_1(u);$$

ce sont les formules du n° 76, où nous écrivons 2ω et $2\omega'$ au lieu de $2K$ et $2iK'$. Il en résulte que la fonction $E(u)$ vérifie les rela-

tions

$$(7)\quad \begin{cases} E(u+2\omega) = E(u), \\ E(u+2\omega') = e^{-\frac{i\pi u}{\omega}} E(u), \end{cases}$$

relations de la forme (5) où $N = 1$. Cette fonction entière $E(u)$ est partout finie; elle a les mêmes zéros que $H_1(u)$, à savoir : le point $u = \omega$ et les points homologues; il y a un et un seul de ces zéros dans chaque parallélogramme des périodes.

Nous avons donné pour $H_1(u)$ la série suivante (p. 115)

$$H_1(u) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{\frac{(2n+1)^2}{4}} e^{\frac{(2n+1)i\pi u}{2\omega}}.$$

La fonction $E(u)$ est donc donnée par la série

$$E(u) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{n(n+1)} e^{\frac{(n+1)i\pi u}{\omega}},$$

ou encore, en changeant n en $n-1$,

$$E(u) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{n(n-1)} e^{\frac{n i\pi u}{\omega}}.$$

I. — Décomposition en facteurs. Conséquences.

218. **Première expression d'une fonction doublement périodique de troisième espèce.** — Soit une fonction $F(u)$ vérifiant les relations

$$(8)\quad \begin{cases} F(u+2\omega) = F(u), \\ F(u+2\omega') = e^{-\frac{Ni\pi u}{\omega}} F(u), \end{cases}$$

où N est un entier positif ou négatif. Si nous élevons à la puissance N la fonction $E(u)$ du numéro précédent, nous obtiendrons une fonction

$$E^N(u),$$

vérifiant les deux relations

$$E^N(u+2\omega) = E^N(u),$$
$$E^N(u+2\omega') = e^{-\frac{Ni\pi u}{\omega}} E^N(u).$$

D'après cela le quotient

$$\Phi(u) = \frac{F(u)}{E^N(u)}$$

est une fonction *elliptique*. On a en effet

$$\Phi(u+2\omega) = \Phi(u), \qquad \Phi(u+2\omega') = \Phi(u).$$

Cette fonction elliptique Φ a, dans un parallélogramme des périodes, autant de zéros que de pôles; on peut l'écrire (n° 40)

$$(9) \qquad \Phi(u) = A\frac{H(u-b_1)H(u-b_2)\ldots H(u-b_r)}{H(u-a_1)H(u-a_2)\ldots H(u-a_r)},$$

sous la condition

$$(10) \qquad a_1+a_2+\ldots+a_r = b_1+b_2+\ldots+b_r.$$

De cette première expression de la fonction $F(u)$ sous la forme

$$F(u) = E^N(u)\Phi(u),$$

on conclut immédiatement les résultats suivants. Nous distinguerons deux cas : 1° l'entier N est positif; 2° l'entier N est négatif.

219. Cas de N positif. — Si nous posons $N = m$, m positif, le facteur $E^m(u)$ est une fonction ne devenant pas infinie et admettant comme zéros d'ordre m le point ω et les points homologues. On a alors, en remplaçant $E(u)$ par son expression (6),

$$(11) \qquad F(u) = Be^{\frac{m\pi u i}{2\omega}}\frac{H^m(u-\omega)H(u-b_1)H(u-b_2)\ldots H(u-b_r)}{H(u-a_1)H(u-a_2)\ldots H(u-a_r)}.$$

Il peut se faire, dans cette expression, que certains des points a_1, a_2, ... coïncident avec ω ou soient homologues de ω : il y aurait alors des réductions évidentes. Mais, dans tous les cas, en comptant chaque zéro et chaque pôle avec son degré de multiplicité, on a le théorème suivant :

Si N est égal à un entier positif m, la fonction $F(u)$ *a, dans un parallélogramme des périodes, m zéros de plus que de pôles. La somme de ces zéros, diminuée de la somme de ces infinis, est congrue à* $m\omega$. La première partie de ce théorème est évidente d'après la formule (11); quant à la deuxième, la

somme des zéros, diminuée de la somme des infinis, est congrue à

$$m\omega + b_1 + b_2 + \ldots + b_r - a_1 - a_2 - \ldots - a_r,$$

c'est-à-dire à $m\omega$ d'après la relation (10).

Réciproquement, soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{r+m}$ des constantes vérifiant la relation

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{r+m} - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_r = m\omega,$$

la fonction

$$F(u) = Be^{\frac{m\pi ui}{2\omega}} \frac{H(u-\beta_1)H(u-\beta_2)\ldots H(u-\beta_{r+m})}{H(u-\alpha_1)\ldots H(u-\alpha_r)}$$

est une fonction vérifiant les relations

$$F(u+2\omega) = F(u), \qquad F(u+2\omega') = e^{-\frac{m\pi ui}{\omega}} F(u),$$

comme il résulte des propriétés de la fonction H.

Fonctions entières admettant les multiplicateurs 1 *et* $e^{-\frac{m\pi ui}{\omega}}$. — Quand N est égal à un entier positif m, nous venons de voir que la fonction F a m zéros de plus que de pôles : il peut se faire qu'elle n'ait pas de pôles du tout : alors c'est une fonction entière $\mathfrak{E}(u)$ ayant dans un parallélogramme m zéros

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_m;$$

ces fonctions particulières ont pour expressions

$$\mathfrak{E}(u) = Be^{\frac{m\pi ui}{2\omega}} H(u-\beta_1)H(u-\beta_2)\ldots H(u-\beta_m),$$

avec la condition

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m = m\omega.$$

On voit que la fonction entière la plus générale, vérifiant les deux relations

$$(12) \qquad \begin{cases} \mathfrak{E}(u+2\omega) = \mathfrak{E}(u), \\ \mathfrak{E}(u+2\omega') = e^{-\frac{m\pi ui}{\omega}} \mathfrak{E}(u), \end{cases}$$

dépend de m constantes arbitraires B, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}$: elle est déterminée, à un facteur constant près B, quand on connaît $(m-1)$ de ces zéros. Nous allons montrer que la fonction entière la plus

générale vérifiant les relations (12) peut s'exprimer en fonction linéaire et homogène de m fonctions spéciales vérifiant les mêmes relations. Pour cela, remarquons que toute fonction entière admettant la période 2ω peut être représentée par une série de la forme

$$(13) \qquad \mathfrak{E}(u) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n e^{\frac{n\pi u i}{\omega}},$$

dont chaque terme admet la période 2ω. En désignant toujours par q la quantité $e^{\frac{\pi\omega' i}{\omega}}$, on a

$$\mathfrak{E}(u + 2\omega') = \sum A_n q^{2n} e^{\frac{n\pi u i}{\omega}},$$

$$e^{-\frac{m\pi u i}{\omega}} \mathfrak{E}(u) = \sum A_n e^{\frac{(n-m)\pi u i}{\omega}}.$$

D'après la seconde des relations (12) ces deux séries doivent être identiques. En égalant dans ces séries les coefficients des mêmes puissances de $e^{\frac{\pi u i}{\omega}}$, on a

$$(14) \qquad A_{n+m} = A_n q^{2n}, \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

D'après cette relation unique entre les coefficients, on voit que l'on peut prendre arbitrairement $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ et déterminer ensuite tous les coefficients.

Ainsi en faisant successivement $n = 0$, $n = m$, $n = 2m$, ..., $n = (\nu - 1)m$, on a

$$A_m = A_0, \qquad A_{2m} = A_m q^{2m}, \qquad \ldots, \qquad A_{\nu m} = A_{(\nu-1)m} q^{2(\nu-1)m},$$

d'où, en multipliant,

$$(15) \qquad A_{\nu m} = A_0 q^{\nu(\nu-1)m};$$

en faisant de même, dans (14), $n = -m$, $n = -2m$, ..., $n = -\mu m$ et multipliant, on vérifiera que la formule (15) subsiste pour ν négatif. Tous les coefficients $A_{\nu m}$ sont ainsi exprimés à l'aide de A_0. Par un calcul semblable on exprime tous les coefficients $A_{\nu m+1}$ en fonction de A_1, $A_{\nu m+2}$ en fonction de A_2, ...,

$A_{\nu m+m-1}$ en fonction de A_{m-1}. On trouve

$$A_{\nu m+1} = A_1 q^{\nu(\nu-1)m+2\nu},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$A_{\nu m+\rho} = A_2 q^{\nu(\nu-1)m+2\rho\nu},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$A_{\nu m+m-1} = A_{m-1} q^{\nu(\nu-1)m+2(m-1)\nu}.$$

En portant ces valeurs dans le développement de la fonction entière $\mathfrak{E}(u)$, on trouve qu'il prend la forme suivante

$$\mathfrak{E}(u) = A_0 E_0(u) + A_1 E_1(u) + \dots + A_\rho E_\rho(u) + \dots + A_{m-1} E_{m-1}(u),$$

où E_0, E_1, ... désignent les fonctions entières suivantes

$$(16)\quad \begin{cases} E_0(u) = \displaystyle\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} q^{\nu(\nu-1)m} e^{\frac{\nu m \pi u i}{\omega}}, \\ E_1(\quad) = e^{\frac{\pi u i}{\omega}} \displaystyle\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} q^{\nu(\nu-1)m+2\nu} e^{\frac{\nu m \pi u i}{\omega}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ E_\rho(u) = e^{\frac{\rho\pi u i}{\omega}} \displaystyle\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} q^{\nu(\nu-1)m+2\rho\nu} e^{\frac{\nu m \pi u i}{\omega}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Ainsi, comme nous l'avons dit, la fonction entière la plus générale admettant les multiplicateurs 1 et $e^{-\frac{m\pi u i}{\omega}}$ est une fonction linéaire et homogène de m fonctions spéciales E_0, E_1, ..., E_{m-1}. L'expression de cette fonction contient m constantes arbitraires A_0, A_1, ..., A_{m-1} dont on peut déterminer les rapports de façon que la fonction $\mathfrak{E}(u)$ admette $m-1$ zéros β_1, β_2, ..., β_{m-1} donnés à l'avance. Ces fonctions E_ρ s'expriment toutes à l'aide de la première : on a évidemment

$$E_\rho(u) = e^{\frac{\rho\pi u i}{\omega}} E_0\left(u + \frac{2\rho\omega'}{m}\right).$$

D'ailleurs la fonction E_0 s'exprime aisément par une fonction de Jacobi. En effet, reprenons la fonction $E(u)$ construite plus

haut (nº 217) avec les périodes 2ω et $2\omega'$

$$E(u \mid \omega, \omega') = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} q^{\nu(\nu-1)} e^{\frac{\nu\pi u i}{\omega}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{q}} e^{\frac{\pi u i}{2\omega}} H_1(u \mid \omega, \omega'),$$

où nous mettons en évidence les périodes ayant servi à construire la fonction H_1. Si dans cette formule on change ω en $\frac{\omega}{m}$, $q = e^{\frac{\pi\omega' i}{\omega}}$ se change en q^m et la série du second membre devient précisément $E_0(u)$. On a donc

$$E_0(u) = E\left(u \,\middle|\, \frac{\omega}{m}, \omega'\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{q^m}} e^{\frac{m\pi u i}{2\omega}} H_1\left(u \,\middle|\, \frac{\omega}{m}, \omega'\right).$$

220. Cas de N négatif. — Supposons maintenant N négatif, et posons

$$N = -m,$$

où m est un entier positif. Les fonctions à étudier sont alors telles que

$$F(u + 2\omega) = F(u),$$

$$F(u + 2\omega') = e^{\frac{m\pi u i}{\omega}} F(u).$$

On conclut immédiatement de ces relations

$$\frac{1}{F(u + 2\omega)} = \frac{1}{F(u)},$$

$$\frac{1}{F(u + 2\omega')} = e^{-\frac{m\pi u i}{\omega}} \frac{1}{F(u)}.$$

L'inverse $\frac{1}{F(u)}$ de la fonction à étudier est donc une fonction aux multiplicateurs 1 et $e^{-\frac{m\pi u i}{\omega}}$ (m positif), c'est-à-dire une des onctions du numéro précédent. L'inverse $\frac{1}{F(u)}$ peut donc s'écrire

$$\frac{1}{F(u)} = B e^{\frac{m\pi u i}{2\omega}} \frac{H(u - \beta_1) \ldots H(u - \beta_{r+m})}{H(u - \alpha_1) \ldots H(u - \alpha_r)},$$

avec la condition

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{r+m} - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_r = m\omega.$$

La fonction $F(u)$ a donc pour expression générale

$$F(u) = Ce^{-\frac{m\pi ui}{2\omega}} \frac{H(u-\alpha_1)\ldots H(u-\alpha_r)}{H(u-\beta_1)\ldots H(u-\beta_{r+m})}.$$

Elle a, dans un parallélogramme des périodes, m pôles de plus que de zéros, et la différence entre la somme de ces pôles et de ces zéros est congrue à $m\omega$.

Il ne peut donc pas exister de fonctions aux multiplicateurs 1 et $e^{\frac{m\pi ni}{\omega}}$, n'ayant pas de pôles. Mais il en existe qui n'ont pas de zéros; ce sont les inverses $\frac{1}{\mathfrak{E}(u)}$ des fonctions sans pôles du numéro précédent.

II. — Décomposition en éléments simples.

221. Étude de l'élément simple. — Désignons par x et y deux variables indépendantes, par m un entier positif, et considérons la fonction de x et y définie par la série

$$(17) \qquad \chi_m(x,y) = \frac{\pi}{2\omega} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{mn\pi yi}{\omega}} q^{mn(n-1)} \cot\frac{\pi}{2\omega}(x-y-2n\omega')$$

ou bien

$$(18) \qquad \chi_m(x,y) = \frac{\pi i}{2\omega} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{mn\pi yi}{\omega}} q^{mn(n-1)} \frac{e^{\frac{\pi(x-y)i}{\omega}} + q^{2n}}{e^{\frac{\pi(x-y)i}{\omega}} - q^{2n}}.$$

Cette série est convergente pour toutes les valeurs de x et y à l'exception de celles qui vérifient la condition

$$x - y = 2n\omega + 2n'\omega' \qquad (n \text{ et } n' \text{ entiers}),$$

et pour lesquelles un des termes de la série devient infini.

Si l'on considère x comme une constante et y comme variable, la fonction $\chi_m(x,y)$ est une fonction uniforme de y n'ayant à distance finie d'autres points singuliers que des pôles du premier

ordre, à savoir les points

$$y = x - 2n\omega - 2n'\omega';$$

le résidu relatif au pôle $y = x$ est -1, car le seul terme de la série qui devient infini pour $y = x$ est

$$\frac{\pi}{2\omega}\cot\frac{\pi}{2\omega}(x - y).$$

Cette fonction vérifie les deux relations suivantes, qui s'établissent aisément :

$$(19)\quad \begin{cases} \chi_m(x, y + 2\omega) = \chi_m(x, y), \\ \chi_m(x, y + 2\omega') = e^{-\frac{m\pi y i}{\omega}}\chi_m(x, y). \end{cases}$$

Cette fonction χ_m de la variable y admet donc les multiplicateurs 1 et $e^{-\frac{m\pi y i}{\omega}}$: elle a dans un parallélogramme $(m+1)$ zéros et un pôle homologue de x.

Si l'on considère, au contraire, y comme une constante et x comme variable, il se présente des circonstances entièrement différentes. La fonction $\chi_m(x, y)$ est alors une fonction uniforme de x n'ayant à distance finie d'autres points singuliers que des pôles du premier ordre, à savoir les points

$$x = y + 2n\omega + 2n'\omega';$$

le résidu de cette fonction relatif au pôle $x = y$ est égal à $+1$. Elle vérifie d'abord la relation évidente

$$(20)\quad \chi_m(x + 2\omega, y) = \chi_m(x, y),$$

puis l'équation

$$(21)\quad \begin{cases} \chi_m(x + 2\omega', y) = e^{\frac{m\pi x i}{\omega}}\chi_m(x, y) \\ \qquad - \dfrac{\pi i}{2\omega}\left(1 + e^{\frac{m\pi x i}{\omega}}\right)E_0(y) \\ \qquad - \dfrac{\pi i}{\omega}e^{\frac{(m-1)\pi x i}{\omega}}E_1(y) - \ldots \\ \qquad - \dfrac{\pi i}{\omega}e^{\frac{(m-\rho)\pi x i}{\omega}}E_\rho(y) - \ldots \\ \qquad - \dfrac{\pi i}{\omega}e^{\frac{\pi x i}{\omega}}E_{m-1}(y), \end{cases}$$

où les m fonctions $E_0, E_1, \ldots, E_{m-1}$ sont celles qui ont été définies plus haut (n° 219).

Pour démontrer cette relation fondamentale (21), remarquons que la série (18) nous donne

$$\chi_m(x+2\omega', y) = \frac{\pi i}{2\omega}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{mn\pi yi}{\omega}} q^{mn(n-1)} \frac{e^{\frac{\pi(x-y)i}{\omega}} + q^{2(n-1)}}{e^{\frac{\pi(x-y)i}{\omega}} - q^{2(n-1)}},$$

ou, en changeant n en $n+1$,

$$\chi_m(x+2\omega', y) = \frac{\pi i}{2\omega}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{m(n+1)\pi yi}{\omega}} q^{mn(n+1)} \frac{e^{\frac{\pi(x-y)i}{\omega}} + q^{2n}}{e^{\frac{\pi(x-y)i}{\omega}} - q^{2n}}.$$

Si nous formons alors la différence

$$\chi_m(x+2\omega', y) - e^{\frac{m\pi xi}{\omega}}\chi_m(x, y),$$

nous obtenons une série qui peut s'écrire

$$(22)\qquad \frac{\pi i}{2\omega}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{m(n+1)\pi yi}{\omega}} q^{mn(n-1)} \frac{(t+u)(u^m - t^m)}{t-u},$$

en posant, pour un moment,

$$(23)\qquad e^{\frac{\pi(x-y)i}{\omega}} = t, \qquad q^{2n} = u.$$

En effectuant la division, on a

$$\frac{(t+u)(u^m - t^m)}{t-u} = -(t^m + 2t^{m-1}u + 2t^{m-2}u^2 + \ldots + 2tu^{m-1} + u^m),$$

et en substituant dans la série (22) on voit que cette série se partage en $(m+1)$ séries.

La première de ces séries est

$$-\frac{\pi i}{2\omega}\sum e^{\frac{m(n+1)\pi yi}{\omega}} q^{mn(n-1)} t^m$$

c'est-à-dire, d'après la valeur de t,

$$-\frac{\pi i}{2\omega} e^{\frac{m\pi xi}{\omega}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{mn\pi yi}{\omega}} q^{mn(n-1)}$$

ou enfin

$$-\frac{\pi i}{2\omega} e^{\frac{m\pi xi}{\omega}} \mathrm{E}_0(y).$$

La deuxième de ces séries est de même

$$-\frac{\pi i}{\omega} \sum e^{\frac{m(n+1)\pi yi}{\omega}} q^{mn(n-1)} t^{m-1} u,$$

c'est-à-dire

$$-\frac{\pi i}{\omega} e^{\frac{(m-1)\pi xi}{\omega}} e^{\frac{\pi yi}{\omega}} \sum e^{\frac{mn\pi yi}{\omega}} q^{mn(n-1)+2n}$$

ou enfin

$$-\frac{\pi i}{\omega} e^{\frac{(m-1)\pi xi}{\omega}} \mathrm{E}_1(y).$$

Ainsi de suite. La $(\rho+1)^{\text{ième}}$ de ces séries est

$$-\frac{\pi i}{\omega} e^{\frac{(m-\rho)\pi xi}{\omega}} e^{\frac{\rho\pi yi}{\omega}} \sum e^{\frac{mn\pi yi}{\omega}} q^{mn(n-1)+2n\rho}$$

ou

$$-\frac{\pi i}{\omega} e^{\frac{(m-\rho)\pi xi}{\omega}} \mathrm{E}_\rho(y).$$

La dernière ou $(m+1)^{\text{ième}}$ de ces séries est

$$-\frac{\pi i}{2\omega} e^{\frac{m\pi yi}{\omega}} \sum e^{\frac{mn\pi yi}{\omega}} q^{mn(n-1)+2nm},$$

c'est-à-dire

$$-\frac{\pi i}{2\omega} \sum e^{\frac{m(n+1)\pi yi}{\omega}} q^{mn(n+1)},$$

ou enfin

$$-\frac{\pi i}{2\omega} \mathrm{E}_0(y),$$

comme on le voit en changeant, dans la dernière $\sum$, n en $n-1$. Ce calcul démontre la formule (21).

On a ainsi les propriétés fondamentales de l'élément simple $\chi_m(x, y)$.

222. Décomposition en éléments simples dans le cas où N est négatif, $\mathrm{N}=-m$. — Soit $\mathrm{F}(u)$ une fonction aux multiplicateurs 1 et $e^{\frac{m\pi u}{\omega}}$, m étant positif. Une telle fonction possède au moins m

pôles dans un parallélogramme des périodes. Supposons qu'elle ait r pôles simples ($r \geqq m$) homologues des points

$$a, \quad b, \quad \ldots, \quad l$$

et que les résidus aux points $a, b, \ldots, l$ soient

$$A, \quad B, \quad \ldots, \quad L.$$

Ces pôles et les résidus correspondants sont liés par m relations qu'il est aisé de former.

Relations entre les pôles et les résidus. — Considérons une des m fonctions entières $E_\rho(u)$ du nº 219 qui admettent les multiplicateurs 1 et $e^{-\frac{m\pi ui}{\rho}}$. Le produit

$$\Phi(u) = F(u)\,E_\rho(u)$$

est une fonction elliptique aux périodes 2ω et $2\omega'$. En effet, les deux facteurs admettent séparément la période 2ω et, quand u croît de $2\omega'$, le premier facteur est multiplié par $e^{\frac{m\pi ui}{\omega}}$, le deuxième par $e^{-\frac{m\pi ui}{\omega}}$ et le produit ne change pas. Cette fonction elliptique a les mêmes pôles que $F(u)$, car le facteur $E_\rho(u)$ n'a pas de pôles. Le résidu de $\Phi(u)$ au pôle $u = a$ est $A\,E_\rho(a)$, car on a, au voisinage de $u = a$,

$$F(u) = \frac{A}{u-a} + \text{fonction régulière},$$

$$E_\rho(u) = E_\rho(a) + (u-a)\,E'_\rho(a) + \ldots,$$

d'où, en multipliant,

$$\Phi(u) = \frac{A\,E_\rho(a)}{u-a} + \text{fonction régulière}.$$

Les résidus de $\Phi(u)$ relatifs aux autres pôles sont de même $B\,E_\rho(b), \ldots, L\,E_\rho(l)$. La somme des résidus d'une fonction elliptique étant nulle, on a la relation

$$(24) \qquad A\,E_\rho(a) + B\,E_\rho(b) + \ldots + L\,E_\rho(l) = 0.$$

En attribuant à l'indice ρ les m valeurs $0, 1, 2, \ldots, m-1$

(n° 219), on obtient ainsi m relations nécessaires entre les pôles et les résidus de $F(u)$.

Décomposition en éléments simples. — Considérons la différence

$$(25)\qquad \Psi(u) = F(u) - A\chi_m(u,a) - B\chi_m(u,b) - \ldots - L\chi_m(u,l);$$

nous allons montrer que cette différence Ψ est *identiquement nulle*. Tout d'abord la fonction $\Psi(u)$ ainsi construite admet les multiplicateurs 1 et $e^{\frac{m\pi ui}{\omega}}$: on a évidemment

$$\Psi(u+2\omega) = \Psi(u),$$

car chaque terme du second membre admet la période 2ω; voyons ce que devient le second membre quand u croît de $2\omega'$: on a d'abord

$$F(u+2\omega') - e^{\frac{m\pi ui}{\omega}} F(u) = 0,$$

puis

$$\chi_m(u+2\omega',a) - e^{\frac{m\pi ui}{\omega}} \chi_m(u,a)$$
$$= -\frac{\pi i}{2\omega}\left(1+e^{\frac{m\pi ui}{\omega}}\right)E_0(a) - \frac{\pi i}{\omega} e^{\frac{(m-1)\pi ui}{\omega}} E_1(a) - \ldots - \frac{\pi i}{\omega} e^{\frac{\pi ui}{\omega}} E_{m-1}(a),$$

$$\chi_m(u+2\omega',b) - e^{\frac{m\pi ui}{\omega}} \chi_m(u,b)$$
$$= -\frac{\pi i}{2\omega}\left(1+e^{\frac{m\pi ui}{\omega}}\right)E_0(b) - \frac{\pi i}{\omega} e^{\frac{(m-1)\pi ui}{\omega}} E_1(b) - \ldots - \frac{\pi i}{\omega} e^{\frac{\pi ui}{\omega}} E_{m-1}(b),$$

. . . . ,

comme il résulte de la relation fondamentale (21) dans laquelle on remplace x par u et y par a, ou b, ..., ou l. D'après cela la différence

$$\Psi(u) - e^{\frac{m\pi ui}{\omega}} \Psi(u)$$

peut s'écrire

$$-\frac{\pi i}{2\omega}\left(1+e^{\frac{m\pi ui}{\omega}}\right)[A\,E_0(a) + B\,E_0(b) + \ldots + L\,E_0(l)],$$
$$-\frac{\pi i}{\omega} e^{\frac{(m-1)\pi ui}{\omega}} [A\,E_1(a) + B\,E_1(b) + \ldots + L\,E_1(l)],$$
. . . .
$$-\frac{\pi i}{\omega} e^{\frac{\pi ui}{\omega}} [A\,E_{m-1}(a) + B\,E_{m-1}(b) + \ldots + L\,E_{m-1}(l)];$$

cette différence est donc nulle, puisque chacune des sommes entre crochets est nulle en vertu des relations (24) entre les pôles et les résidus. Ainsi la fonction $\Psi(u)$ vérifie les deux relations

$$(26)\quad \begin{cases} \Psi(u+2\omega) = \Psi(u), \\ \Psi(u+2\omega') = e^{\frac{m\pi ui}{\omega}}\Psi(u). \end{cases}$$

De plus cette fonction Ψ est finie en tous les points à distance finie; elle n'a plus de pôles. Par exemple, dans le voisinage de $u=a$, on a

$$F(u) = \frac{A}{u-a} + \text{fonction régulière},$$

$$\chi_m(u,a) = \frac{1}{u-a} + \text{fonction régulière},$$

et les autres fonctions $\chi_m(u,b)$, ..., $\chi_m(u,l)$ sont régulières au point a : dans la combinaison donnant $\Psi(u)$, $\frac{1}{u-a}$ disparaît, et $\Psi(u)$ est régulière au point a. Elle l'est également aux points b, ..., l et aux points homologues. En résumé, $\Psi(u)$ est une fonction *sans pôles* vérifiant les relations (26). Mais nous avons vu qu'il n'existe pas de fonctions sans pôles vérifiant ces relations (n° 220) : donc $\Psi(u)$ est identiquement nulle et l'on a la formule

$$(27)\quad F(u) = A\chi_m(u,a) + B\chi_m(u,b) + \ldots + L\chi_m(u,l),$$

qui est la formule de décomposition cherchée, mettant en évidence les pôles de $F(u)$, a, b, ..., l et les résidus A, B, ..., L.

Réciproquement, si a, b, ..., l sont des points arbitraires, non homologues deux à deux, et A, B, ..., L des constantes vérifiant les relations (24), l'expression (27) définit une fonction aux multiplicateurs 1 et $e^{\frac{m\pi ui}{\omega}}$ admettant comme pôles simples les points a, b, ..., l avec les résidus A, B, ..., L, et leurs homologues.

Remarque. — On obtiendrait cette même formule de décomposition en considérant le produit

$$\Pi(v) = F(v)\chi(u,v),$$

comme une fonction de v. Ce produit $\Pi(v)$ est une fonction ellip-

tique aux périodes 2ω et $2\omega'$, car les fonctions de v, $F(v)$ et $\chi_m(u, v)$ ont des multiplicateurs inverses; cette fonction $H(v)$ admet comme pôles les points homologues de

$$v = a, \quad v = b, \quad \ldots, \quad v = l, \quad v = u,$$

avec les résidus respectifs

$$A\chi_m(u, a), \quad B\chi_m(u, b), \quad \ldots, \quad L\chi_m(u, l), \quad -F(u);$$

l'expression du dernier de ces résidus résulte de ce que $\chi_m(u, v)$, regardé comme fonction de v, admet le pôle simple $v = u$ avec le résidu -1 (n° 221). En écrivant que la somme des résidus de la fonction elliptique, relatifs aux pôles non homologues, est nulle, on a immédiatement la formule de décomposition (27).

Cas des pôles multiples. — Nous avons écrit la formule de décomposition et les relations entre les pôles et les résidus dans le cas des pôles simples. Si les pôles sont multiples ces formules se généralisent, comme celles que nous avons données (nos 26 et 207) pour les fonctions elliptiques et les fonctions à multiplicateurs constants. Bornons-nous à écrire ces formules. Supposons que la fonction $F(u)$ aux multiplicateurs 1 et $e^{\frac{m\pi i}{\omega}}$ admette les pôles $a, b, \ldots, l$ avec les parties principales

$$\frac{A}{u-a} + \frac{A_1}{(u-a)^2} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{(u-a)^{\alpha}},$$
$$\frac{B}{u-b} + \frac{B_1}{(u-b)^2} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{(u-b)^{\beta}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

on aura la formule

$$F(u) = \sum \left[A\chi_m(u, a) + A_1 \frac{d\chi_m(u, a)}{da} + \frac{A_2}{1.2} \frac{d^2\chi_m(u, a)}{da^2} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{A_{\alpha-1}}{1.2\ldots(\alpha-1)} \frac{d^{\alpha-1}\chi_m(u, a)}{da^{\alpha-1}} \right],$$

la somme étant étendue à tous les pôles. En outre, les relations

entre les pôles et les coefficients des parties principales sont

$$\sum\left[A\,E_\rho(a)+A_1\frac{d\,E_\rho(a)}{da}+\frac{A_2}{1.2}\frac{d^2\,E_\rho(a)}{da^2}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{1.2\ldots(\alpha-1)}\frac{d^{\alpha-1}\,E_\rho(a)}{da^{\alpha-1}}\right]=0,$$

où l'on fait successivement $\rho=0, 1, 2, \ldots, (m-1)$.

223. Exemple. — Soit

$$\varphi(x)=\frac{1}{H(x)\,H_1(x)}.$$

Cette fonction vérifie les relations

$$\varphi(x+2\omega)=\varphi(x),$$
$$\varphi(x+2\omega')=e^{\frac{2\pi i}{\omega}\left(x+\omega'-\frac{\omega}{2}\right)}\varphi(x).$$

Si donc on fait, pour un moment,

$$x+\omega'-\frac{\omega}{2}=u,$$
$$\varphi\left(u-\omega'+\frac{\omega}{2}\right)=F(u),$$

cette fonction F vérifie les deux équations

$$F(u+2\omega)=F(u),\qquad F(u+2\omega')=e^{\frac{2\pi ui}{\omega}}F(u).$$

Pour cette fonction F le nombre entier désigné par m est donc 2. La fonction $\varphi(x)$ admet dans un parallélogramme des périodes les deux pôles simples o et ω avec les résidus respectifs $\frac{1}{H'(0)\,H_1(0)}$ et $-\frac{1}{H'(0)\,H_1(0)}$. Comme u est égal à $x+\omega'-\frac{\omega}{2}$, la fonction $F(u)$ admet les deux pôles

$$a=\omega'-\frac{\omega}{2},\qquad b=\omega'+\frac{\omega}{2},$$

avec les mêmes résidus

$$A=\frac{1}{H'(0)\,H_1(0)},\qquad B=-\frac{1}{H'(0)\,H_1(0)}.$$

On a donc la formule de décomposition

$$F(u) = A\,\chi_2(u, a) + B\,\chi_2(u, b),$$

d'où, en revenant à la variable x et remplaçant A, B, a, b par leurs valeurs

$$\frac{H'(o)\,H_1(o)}{H(x)\,H_1(x)} = \chi_2\left(x + \omega' - \frac{\omega}{2},\ \omega' - \frac{\omega}{2}\right) - \chi_2\left(x + \omega' - \frac{\omega}{2},\ \omega' + \frac{\omega}{2}\right).$$

Si l'on met pour ces fonctions χ_2 les séries servant de définition, on a

$$\frac{H'(o)\,H_1(o)}{H(x)\,H_1(x)}$$

$$= \frac{\pi}{2\omega} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n q^{2n^2} \left[\cot\frac{\pi}{2\omega}(x - 2n\omega') - \cot\frac{\pi}{2\omega}(x - \omega - 2n\omega')\right].$$

La seconde cotangente est égale à $-\tang\frac{\pi}{2\omega}(x - 2n\omega')$; on a donc enfin, en réduisant,

$$\frac{H'(o)\,H_1(o)}{H(x)\,H_1(x)} = \frac{\pi}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n q^{2n^2} \frac{1}{\sin\frac{\pi}{\omega}(x - 2n\omega')}.$$

On établira de même, à titre d'exercice, la formule

$$\frac{H'(o)\,H_1(o)}{\Theta(x)\,\Theta_1(x)} = \frac{\pi i}{\omega} \sum (-1)^n q^{\frac{(2n-1)^2}{2}} \cot\frac{\pi}{\omega}[x - (2n-1)\omega'].$$

M. Hermite a montré l'importance que présentent les développements de ce genre pour les applications à l'Arithmétique.

224. Formule de décomposition dans le cas de N positif. $N = m$. — Soit $F(u)$ une fonction aux multiplicateurs 1 et $e^{-\frac{m\pi ui}{\omega}}$. Supposons que cette fonction admette les pôles simples $a, b, \ldots, l$ non deux à deux homologues, avec les résidus A, B, ..., L. L'expression

$$\Psi(u) = F(u) + A\,\chi_m(a, u) + B\,\chi_m(b, u) + \ldots + L\,\chi_m(l, u)$$

est une fonction aux mêmes multiplicateurs, *mais n'ayant plus*

de pôles. En effet, chacune des fonctions $F(u)$, $\chi_m(a, u)$, ..., $\chi_m(l, u)$ admet les multiplicateurs 1 et $e^{-\frac{m\pi ui}{\omega}}$ (n° 221). En outre, dans le voisinage de $u = a$ par exemple, on a

$$F(u) = \frac{A}{u-a} + \text{fonction régulière},$$

$$\chi_m(a, u) = -\frac{1}{u-a} + \text{fonction régulière}.$$

et les autres fonctions $\chi_m(b, u)$, ..., $\chi_m(l, u)$ sont régulières. Dans la combinaison donnant Ψ, $\frac{1}{u-a}$ disparaît. Le même fait se produit en tous les pôles de $F(u)$. La fonction $\Psi(u)$, admettant les multiplicateurs 1 et $e^{-\frac{m\pi ui}{\omega}}$ et étant partout finie, est une des fonctions entières $\mathfrak{E}(u)$ étudiées au n° 219. Elle est donc de la forme

$$\lambda_0 E_0(u) + \lambda_1 E_1(u) + \ldots + \lambda_{m-1} E_{m-1}(u),$$

où $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ sont des constantes déterminées. On a alors la formule

$$(28)\quad \left\{ \begin{aligned} F(u) = &-A\chi_m(a, u) - B\chi_m(b, u) - \ldots - L\chi_m(l, u) \\ &+ \lambda_0 E_0(u) + \lambda_1 E_1(u) + \ldots + \lambda_{m-1} E_{m-1}(u). \end{aligned} \right.$$

On pourra déterminer les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ en attribuant m valeurs numériques à la variable u. Pour une étude plus détaillée de ce point, nous renverrons aux Mémoires de M. Appell.

Dans le cas des pôles multiples, chaque terme de cette formule doit être remplacé par une somme telle que

$$-A\chi_m(a, u) - A_1 \frac{d\chi_m(a, u)}{da} - \frac{A_2}{1.2} \frac{d^2\chi_m(a, u)}{da^2} - \ldots$$
$$- \frac{A_{\alpha-1}}{1.2\ldots(\alpha-1)} \frac{d^{\alpha-1}\chi_m(a, u)}{da^{\alpha-1}}.$$

Dans ces formules il n'y a aucune relation nécessaire entre les pôles et les parties principales correspondantes. Ainsi, quels que soient les points $a, b, \ldots, l$ et les constantes $A, B, \ldots, L, \lambda_0, \lambda_1, \ldots,$

λ_{m-1}, la fonction définie par la formule (28) admet les multiplicateurs 1 et $e^{-\frac{m\pi ui}{\omega}}$.

225. **Résumé**. — On voit que le même élément simple $\chi_m(x, y)$ peut être employé pour la décomposition des fonctions $F(u)$ à multiplicateurs 1 et $e^{-\frac{N\pi ui}{\omega}}$, que N soit positif ou négatif. Quand N est négatif, $N = -m$, c'est x qui est la variable u et y qui coïncide successivement avec les pôles. Quand N est positif, $N = m$, c'est y qui est la variable u et x qui coïncide successivement avec les pôles.

CHAPITRE XIII.

PÉRIODES ÉQUIVALENTES. NOTIONS SUR LES FONCTIONS MODULAIRES.

I. — GÉNÉRALITÉS.

226. **Périodes équivalentes.** — Soient 2ω et $2\omega'$ une paire de périodes primitives d'une fonction elliptique. Posons

$$(1)\qquad \begin{cases} \omega'_1 = a\omega' + b\omega, \\ \omega_1 = c\omega' + d\omega, \end{cases}$$

a, b, c, d désignant quatre nombres entiers positifs, négatifs ou nuls, tels que

$$ad - bc = \pm 1.$$

En résolvant alors les équations (1) par rapport à ω et ω', on trouve pour ω et ω' des fonctions linéaires et homogènes à coefficients entiers de ω_1 et ω'_1 : par exemple, si $ad - bc = 1$, on a

$$(2)\qquad \begin{cases} \omega' = d\omega'_1 - b\omega_1, \\ \omega = -c\omega'_1 + a\omega_1. \end{cases}$$

On dit que 2ω et $2\omega'$ d'une part, $2\omega_1$ et $2\omega'_1$ d'autre part sont des systèmes de périodes *équivalentes*. Une fonction admettant les périodes 2ω et $2\omega'$ admet également les périodes $2\omega_1$ et $2\omega'_1$ et réciproquement. En effet, si une fonction $F(u)$ admet les périodes 2ω et $2\omega'$, on a

$$F(u + 2a\omega' + 2b\omega) = F(u),$$
$$F(u + 2c\omega' + 2d\omega) = F(u):$$

donc

$$F(u + 2\omega'_1) = F(u),$$
$$F(u + 2\omega_1) = F(u)$$

et la fonction admet les périodes $2\omega_1$ et $2\omega'_1$. La réciproque se démontre de la même façon en partant des relations telles que (2).

Si une fonction $F(u)$ admet les périodes $2\omega_1$ et $2\omega'_1$ on a

$$F(u + 2d\omega'_1 - 2b\omega_1) = F(u).$$
$$F(u - 2c\omega'_1 + 2a\omega_1) = F(u);$$

donc

$$F(u + 2\omega') = F(u),$$
$$F(u + 2\omega) = F(u).$$

227. **Rapport des périodes.** — Nous avons supposé que, dans le rapport des périodes

$$\tau = \frac{\omega'}{\omega}$$

le coefficient de i est *positif*. Nous allons démontrer que, dans le rapport

$$\tau_1 = \frac{\omega'_1}{\omega_1}$$

des périodes équivalentes, le coefficient de i est encore positif si

$$ad - bc = +1;$$

il serait au contraire négatif si l'on prenait

$$ad - bc = -1.$$

En effet, soit

$$\omega = \alpha + \beta i,$$
$$\omega' = \alpha' + \beta' i;$$

on a

$$\tau = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{(\alpha' + \beta' i)(\alpha - \beta i)}{\alpha^2 + \beta^2},$$

le coefficient de i est donc du signe de

$$\alpha\beta' - \beta\alpha'.$$

Soient maintenant

$$\omega_1 = \alpha_1 + \beta_1 i, \qquad \omega'_1 = \alpha'_1 + \beta'_1 i;$$

les relations (1) donnent

$$\alpha'_1 = a\alpha' + b\alpha, \qquad \alpha_1 = c\alpha' + d\alpha,$$
$$\beta'_1 = a\beta' + b\beta, \qquad \beta_1 = c\beta' + d\beta.$$

On voit que

$$\alpha_1\beta'_1 - \beta_1\alpha'_1 = (\alpha\beta' - \beta\alpha')(ad - bc),$$

et si l'on prend $ad - bc = 1$,

$$\alpha_1 \beta'_1 - \beta_1 \alpha'_1 = \alpha\beta' - \beta\alpha';$$

donc le coefficient de i, dans

$$\tau_1 = \frac{\omega'_1}{\omega_1} = \frac{a\omega' + b\omega}{c\omega' + d\omega} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d},$$

a également le signe $+$.

Si l'on avait $ad - bc = -1$, le coefficient de i dans τ_1 serait négatif.

228. **Réseaux de parallélogrammes formés avec les périodes équivalentes.** — Prenons les expressions

$$w = 2m\omega + 2n\omega', \qquad w_1 = 2m_1\omega_1 + 2n_1\omega'_1,$$

dans lesquelles m et n, m_1 et n_1 prennent toutes les valeurs entières positives, négatives ou nulles. Les points w forment les sommets du réseau des parallélogrammes construits avec les périodes 2ω et $2\omega'$; les points w_1, les sommets du réseau analogue construit avec $2\omega_1$ et $2\omega'_1$. Nous allons montrer que *ces deux réseaux ont les mêmes sommets,* c'est-à-dire que les quantités w_1 sont, à l'ordre près, identiques aux quantités w.

En effet, chacune des quantités w_1 fait partie de la suite des quantités w, comme on le voit, en remplaçant, dans w_1, ω_1 et ω'_1 par leurs valeurs (1) en fonction de ω et ω'. Inversement, comme $ad - bc = \pm 1$ chacune des quantités w fait partie de la suite des quantités w_1, comme on le voit, en remplaçant, dans w, ω et ω' par leurs valeurs (2). Donc, si l'on suppose $ad - bc = \pm 1$ les quantités w sont, à l'ordre près, les mêmes que les quantités w_1. Les deux réseaux ont les mêmes sommets.

On peut remarquer, en outre, que les parallélogrammes du premier réseau $(2\omega, 2\omega')$ sont *équivalents en surface* à ceux du second $(2\omega_1, 2\omega'_1)$. En effet, les trois points

$$0, \quad 2\omega, \quad 2\omega'$$

sont les sommets d'un triangle qui est la moitié d'un parallélogramme des périodes 2ω et $2\omega'$. Si l'on fait

$$\omega = \alpha + i\beta, \qquad \omega' = \alpha' + i\beta',$$

la moitié de l'aire de ce triangle est

$$\pm(\alpha\beta' - \beta\alpha').$$

Si l'on fait de même

$$\omega_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \qquad \omega'_1 = \alpha'_1 + i\beta'_1,$$

la moitié de l'aire du triangle de sommets

$$0, \quad 2\omega_1, \quad 2\omega'_1$$

est

$$\pm(\alpha_1\beta'_1 - \beta_1\alpha'_1).$$

Or nous venons de voir (n° 227) que ces deux quantités $\alpha\beta' - \beta\alpha'$ et $\alpha_1\beta'_1 - \beta_1\alpha'_1$ ont même valeur absolue. Le théorème est donc démontré.

II. — Notation de Weierstrass.

229. Formes en nombre infini de la fonction σ. — Considérons le produit doublement infini à l'aide duquel nous avons défini la fonction σu

$$u\prod{}'\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}},$$

$$w = 2m\omega + 2n\omega', \qquad \begin{matrix} m = \\ n = \end{matrix}\Big\} 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

et soient $2\omega_1$, $2\omega'_1$ des périodes équivalentes à 2ω, $2\omega'$; les quantités

$$w_1 = 2m_1\omega_1 + 2n_1\omega'_1, \qquad \begin{matrix} m_1 = \\ n_1 = \end{matrix}\Big\} 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

sont les mêmes, à l'ordre près, que les quantités w; le produit

$$u\prod{}'\left(1-\frac{u}{w_1}\right)e^{\frac{u}{w_1}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w_1^2}}$$

est donc composé des mêmes facteurs que le produit précédent; ou, en précisant, tout facteur de l'un des produits est aussi un facteur de l'autre produit. On sait que l'ordre des facteurs n'intervient pas; on a donc

$$u\prod{}'\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}} = u\prod{}'\left(1-\frac{u}{w_1}\right)e^{\frac{u}{w_1}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w_1^2}},$$

ou, en désignant par $\sigma(u \mid \omega, \omega')$, la fonction σ dont les zéros sont

$$2m\omega + 2n\omega',$$
$$\sigma(u \mid \omega, \omega') = \sigma(u \mid \omega_1, \omega'_1),$$

sous la seule condition que les périodes $2\omega_1$, $2\omega'_1$ sont équivalentes aux périodes 2ω et $2\omega'$.

Ainsi la fonction σ ne change pas quand on remplace la paire de périodes primitives, qui a servi à la construire, par toute autre paire de périodes équivalentes. Il en est de même, évidemment, des fonctions ζ et p qui se déduisent de σ par des différentiations. C'est ce que l'on voit aussi en partant des séries qui définissent $\zeta(u \mid \omega, \omega')$ et $p(u \mid \omega, \omega')$. Quand, dans ces séries, on remplace 2ω et $2\omega'$ par les périodes équivalentes $2\omega_1$ et $2\omega'_1$, elles ne changent pas, car les termes qui les composent ne font que changer de places.

230. **Invariants. Invariant absolu J.** — Les invariants

$$g_2 = 2^2.3.5 \sum{}' \frac{1}{w^4}, \qquad g_3 = 2^2.5.7 \sum{}' \frac{1}{w^6},$$
$$w = 2m\omega + 2n\omega'$$

ne changent pas de valeurs quand on remplace les périodes 2ω et $2\omega'$ par des périodes équivalentes $2\omega_1$ et $2\omega'_1$. Ce fait est évident, d'après ce que nous venons de voir, car la substitution de ω_1 et ω'_1 à ω et ω', dans les deux séries, ne fait que changer l'ordre des termes.

La quantité g_2 est homogène et du degré -4 par rapport à ω et ω'; g_3, homogène et du degré -6 par rapport à ω et ω'. On peut mettre ce fait en évidence, en écrivant

$$w = \omega(2m + 2n\tau), \qquad \tau = \frac{\omega'}{\omega}.$$

Alors

$$g_2 = 2^2.3.5 \frac{1}{\omega^4} \sum{}' \frac{1}{(2m + 2n\tau)^4},$$

$$g_3 = 2^2.5.7 \frac{1}{\omega^6} \sum{}' \frac{1}{(2m + 2n\tau)^6}.$$

Le discriminant

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2$$

est homogène et du degré -12 par rapport à ω et ω'.

Nous allons former une combinaison de g_2 et g_3 homogène et de degré o en ω et ω' : cette combinaison ne dépendra plus que du rapport des périodes τ. Pour cela considérons, avec M. Klein, la quantité

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2}.$$

Cette quantité J, étant le quotient de deux fonctions homogènes de degrés -12 de ω et ω', est du degré o. Elle ne dépend plus que du rapport τ des périodes. Nous mettrons en évidence cette variable unique τ dont dépend J, en écrivant cette quantité J sous la forme

$$J(\tau).$$

On peut appeler cette fonction $J(\tau)$ l'*invariant absolu* des fonctions elliptiques aux périodes 2ω et $2\omega'$. Nous avons déjà remarqué au n° 36 que $\frac{g_2^3}{g_3^2}$ est une fonction du seul rapport des périodes : avec la notation de M. Klein, on a

$$\frac{g_2^3}{g_3^2} = 27 \frac{J}{J-1}. \tag{3}$$

III. — Fonction modulaire. Groupe modulaire.

231. Propriété fondamentale de la fonction $J(\tau)$. — Comme les invariants g_2 et g_3 ne changent pas quand on remplace 2ω et $2\omega'$ par deux périodes équivalentes quelconques

$$\omega'_1 = a\omega' + b\omega,$$
$$\omega_1 = c\omega' + d\omega, \qquad ad - bc = \pm 1,$$

il en est de même de J. Or, quand on fait cette substitution, le rapport

$$\tau = \frac{\omega'}{\omega}$$

devient

$$\tau_1 = \frac{\omega'_1}{\omega_1} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

On a donc

$$J(\tau_1) = J(\tau),$$

ou encore

$$J\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = J(\tau), \tag{4}$$

a, *b*, *c*, *d* désignant quatre entiers quelconques tels que

$$ad - bc = \pm 1.$$

La fonction $J(\tau)$ présente donc cette propriété remarquable de ne pas changer de valeur, quand on remplace τ par $\frac{a\tau + b}{c\tau + d}$, *a*, *b*, *c*, *d* étant des entiers assujettis à la seule condition

$$ad - bc = \pm 1.$$

C'est la plus simple des *fonctions modulaires*. Elle nous offre le type d'un nouveau genre de fonctions, comprenant les fonctions modulaires, dont le premier exemple a été donné par M. Hermite, à propos de ses recherches sur la résolution de l'équation du cinquième degré, et dont les propriétés générales ont été principalement étudiées par M. Klein (Voyez *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen*, ausgearbeitet von Dr Robert Fricke, Leipzig, Teubner; 1890). Ces fonctions sont d'ailleurs un cas très particulier des fonctions fuchsiennes et kleinéennes dont la théorie a été créée par M. Poincaré (*Acta Mathematica*, t. I).

232. **La fonction J est paire.** — Dans la relation fondamentale (4), on peut prendre par exemple $a = 1$, $d = -1$, $b = 0$, $c = 0$. On a alors

$$J(-\tau) = J(\tau).$$

Cela résulte d'ailleurs évidemment de ce que les invariant g_2 et g_3 ne changent pas, quand on change l'une des périodes ω ou ω', de signe.

D'après cette propriété, on peut toujours supposer que les quatre entiers vérifient la relation

$$ad - bc = +1,$$

car on a

$$J\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = J\left(\frac{-a\tau - b}{c\tau + d}\right);$$

on peut donc toujours changer à volonté le signe des entiers *a* et *b* et par conséquent celui de $ad - bc$. Dans tout ce qui suit nous

nous limiterons en conséquence au cas de

$$ad - bc = +1.$$

Nous supposerons la partie imaginaire de τ *positive :* celle de

$$\tau_1 = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

est alors également positive (n° 227).

233. Remarques sur les substitutions linéaires. — Soit

$$\tau_1 = \frac{a\tau + b}{c\tau + d},$$

on dit que l'on obtient τ_1 en faisant sur τ la substitution linéaire

$$(5) \qquad \tau_1 = S\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Substitution inverse. — En résolvant par rapport à τ la relation (5), on a une autre substitution

$$(6) \qquad \tau = \frac{-d\tau_1 + b}{c\tau_1 - a},$$

que l'on appelle *substitution inverse* de S et que l'on désigne pour cette raison par S^{-1}. On a alors

$$\tau = S^{-1}\tau_1.$$

Produit de deux ou plusieurs substitutions. — Soit S' une autre substitution formée avec d'autres coefficients a', b', c', d'. Posons

$$\tau_2 = S'\tau_1 = \frac{a'\tau_1 + b'}{c'\tau_1 + d'}$$

et cherchons la relation entre τ_2 et τ ; nous aurons, en remplaçant τ_1 par sa valeur $S\tau$,

$$\tau_2 = S'S\tau = \frac{a'(a\tau + b) + b'(c\tau + d)}{c'(a\tau + b) + d'(c\tau + d)}.$$

Cette nouvelle substitution linéaire $\tau_2 = \frac{A\tau + B}{C\tau + D}$, dont les coeffi-

cients sont

$$(7) \qquad \begin{cases} A = aa' + cb', & B = ba' + db', \\ C = ac' + cd', & D = bc' + dd', \end{cases}$$

s'appelle le produit de S par S'; on la désigne par S'S. On a identiquement

$$AD - BC = (a'd' - b'c')(ad - bc).$$

La substitution SS' est de même le produit de S' par S : on l'obtient en faisant d'abord la substitution S', puis sur le résultat la substitution S. Cette substitution SS' est, en général, différente de la substitution S'S. Dans cette notation symbolique des substitutions, il n'est donc pas permis d'intervertir l'ordre des facteurs. On peut maintenant imaginer trois substitutions consécutives S, S', S'' : la substitution linéaire obtenue en faisant d'abord la substitution S, sur le résultat la substitution S', sur le nouveau résultat la substitution S'', est désignée par

$$S''S'S,$$

et ainsi de suite.

Quand deux ou plusieurs substitutions consécutives sont les mêmes, au lieu d'écrire SS, SSS, ..., on emploie la notation des exposants et l'on écrit S^2, S^3, ...

Remarque. — Le produit de la substitution par son inverse est la substitution identique

$$\tau = \tau,$$

que l'on désigne symboliquement par 1. On a, en effet,

$$\tau_1 = S\tau,$$
$$\tau = S^{-1}\tau_1;$$

donc, en éliminant τ_1,

$$\tau = S^{-1}S\tau,$$

ce que l'on exprime en écrivant

$$S^{-1}S = 1;$$

on a aussi

$$SS^{-1} = 1.$$

Si l'on répète deux, trois fois de suite, la substitution inverse

S^{-1}, au lieu d'écrire $S^{-1}S^{-1}$, $S^{-1}S^{-1}S^{-1}$. ..., on emploie des exposants négatifs et l'on écrit S^{-2}, S^{-3}, . . .

234. **Groupe de substitutions.** — Une suite de substitutions données S_1, S_2, ..., S_ν, ..., en nombre fini ou infini,

$$S_\nu \tau = \frac{a_\nu \tau + b_\nu}{c_\nu \tau + d_\nu}$$

forme un groupe, si l'inverse d'une quelconque de ces substitutions et le produit de deux quelconques de ces substitutions sont encore des substitutions de la suite.

235. **Groupe modulaire.** — D'après cette définition, toutes les substitutions en nombre infini

$$S\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d},$$

où a, b, c, d sont des entiers assujettis à la seule condition

$$ad - bc = 1,$$

forment un groupe. En effet la substitution inverse de S,

$$S^{-1}\tau = \frac{-d\tau + b}{c\tau - a} = \frac{a_1\tau + b_1}{c_1\tau + d_1},$$

est encore formée avec quatre entiers a_1, b_1, c_1, d_1 tels que

$$a_1 d_1 - b_1 c_1 = ad - bc = 1.$$

Le produit $S'S$ de deux des substitutions considérées est une substitution

$$\frac{A\tau + B}{C\tau + D},$$

dont les coefficients sont entiers d'après les formules (7) et vérifient la relation $AD - BC = 1$, car on a

$$AD - BC = (a'd' - b'c')(ad - bc)$$

et les deux facteurs du second membre sont égaux à 1 par hypothèse.

Le groupe ainsi défini est le groupe modulaire, et l'on peut dire

que la fonction $J(\tau)$ est laissée invariable par toutes les substitutions de ce groupe.

236. **Substitutions fondamentales du groupe modulaire.** — Toutes les substitutions du groupe modulaire peuvent être engendrées par les produits des puissances positives et négatives des deux substitutions

$$S\tau = \tau + 1, \qquad (a = 1,\ b = 1,\ c = 0,\quad d = 1),$$

$$T\tau = -\frac{1}{\tau}, \qquad (a = 0,\ b = 1,\ c = -1,\ d = 0),$$

que l'on appelle pour cette raison les *substitutions fondamentales du groupe*.

L'inverse de $S\tau$ est

$$S^{-1}\tau = \tau - 1;$$

l'inverse de $T\tau$ est

$$T^{-1}\tau = -\frac{1}{\tau},$$

elle est égale à $T\tau$. Nous ne nous arrêterons pas à démontrer que toute substitution à coefficients entiers

$$\frac{a\tau + b}{c\tau + d},$$

telle que $ad - bc = 1$, peut être obtenue en multipliant ces substitutions fondamentales et leurs inverses dans un ordre quelconque, chaque facteur pouvant être répété un nombre quelconque de fois. Nous admettrons ce point dont on trouvera la démonstration dans le Livre de M. Klein sur les fonctions modulaires.

Bornons-nous à remarquer que le fait, que toutes les substitutions du groupe modulaire peuvent être obtenues par la multiplication de deux substitutions fondamentales et de leurs inverses, a déjà son analogue dans la théorie des fonctions doublement périodiques. Si l'on appelle 2ω et $2\omega'$ les deux périodes, une fonction doublement périodique $F(u)$ ne change pas de valeur quand on fait sur u toutes les substitutions contenues dans la formule

$$u + 2m\omega + 2n\omega',$$

m et n étant deux entiers quelconques. Ces substitutions forment

un groupe qui admet comme substitutions fondamentales les deux substitutions

$$Su = u + 2\omega,$$
$$Tu = u + 2\omega',$$

dont les inverses sont

$$S^{-1}u = u - 2\omega,$$
$$T^{-1}u = u - 2\omega'.$$

Il est évident que par la multiplication de ces substitutions on obtient toutes les substitutions de la forme $u + 2m\omega + 2n\omega'$.

237. **Interprétation géométrique.** — Pour représenter géométriquement la double périodicité, nous avons divisé le plan en cases qui sont des parallélogrammes tous égaux, et nous avons remarqué que la fonction reprend les mêmes valeurs aux points homologues de toutes ces cases. L'une de ces cases étant choisie comme case fondamentale, quand le point u décrit cette case, les points homologues, $u + 2m\omega + 2n\omega'$, décrivent chacun une des autres cases.

On peut opérer de même pour la fonction modulaire $J(\tau)$. Comme nous supposons la partie imaginaire de τ positive, le point représentatif de τ est dans le demi-plan situé au-dessus de l'axe des quantités réelles. On peut alors décomposer ce demi-plan en cases telles que l'une de ces cases étant choisie comme case fondamentale, quand le point τ décrit cette case, les points

$$\frac{a\tau + b}{c\tau + d},$$

a, b, c, d entiers tels que $ad - bc = 1$, décrivent chacun une des autres cases. La fonction $J(\tau)$ prend alors la même valeur aux points correspondants de toutes les cases et il suffit de la connaître dans la case fondamentale, pour la connaître dans tout le demi-plan.

Cette division du demi-plan en cases peut se faire d'une infinité de façons. La plus simple est celle que l'on réalise avec des arcs de cercle ayant leurs centres sur l'axe des quantités réelles. Le point de départ de cette division est dans l'interprétation géométrique des substitutions linéaires, à coefficients réels, à l'aide de la combinaison de deux transformations successives par rayons

vecteurs réciproques, telle qu'elle résulte des travaux de MM. Klein, Schwarz et Poincaré.

IV. — Notation de Jacobi.

238. **Expression de $J(\tau)$ en fonction du module k.** — Nous avons indiqué (nº 97) la relation qui lie la fonction pu aux périodes 2ω et $2\omega'$ à la fonction $\operatorname{sn} u$ aux périodes $2K$ et $2iK'$. Nous avons vu que le rapport des périodes est le même

$$\tau = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{iK'}{K},$$

et, en désignant par λ une constante auxiliaire, nous avons trouvé pour les racines e_1, e_2, e_3 les valeurs

$$3\lambda^2 e_1 = 2 - k^2, \qquad 3\lambda^2 e_2 = 2k^2 - 1, \qquad 3\lambda^2 e_3 = -1 - k^2;$$

on en déduit les différences des racines deux à deux et l'on en conclut en multipliant ces trois différences

$$\lambda^6(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)(e_3 - e_1) = -k^2(1 - k^2).$$

On sait que, dans un polynome

$$4x^3 - g_2 x - g_3,$$

dont les racines sont e_1, e_2, e_3 le discriminant

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2,$$

est donné par la formule

$$\Delta = 16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2.$$

On a donc

$$\Delta = \frac{16k^4(1 - k^2)^2}{\lambda^{12}}.$$

D'autre part, le produit des racines étant $\frac{g_3}{4}$ on a

$$g_3 = \frac{4(2 - k^2)(1 - 2k^2)(1 + k^2)}{27\lambda^6}.$$

L'expression de J en fonction du module s'obtient alors facile-

ment. On a en effet

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta}, \qquad J - 1 = 27\frac{g_3^2}{\Delta},$$

donc

$$(8) \qquad J - 1 = \frac{(2 - k^2)^2(1 - 2k^2)^2(1 + k^2)^2}{27k^4(1 - k^2)^2}.$$

D'après cette relation, quand J est donné, k^2 a six valeurs. Mais on vérifie immédiatement que, si

$$k^2 = \mu$$

est une racine de l'équation (8) en k^2, les autres racines sont

$$\frac{1}{\mu}, \quad 1 - \mu, \quad \frac{\mu - 1}{\mu}, \quad \frac{\mu}{\mu - 1}, \quad \frac{1}{1 - \mu}.$$

Il suffit de constater que le deuxième membre ne change pas quand on remplace k^2 par l'une de ces six quantités.

Le carré du module k^2 est une fonction du rapport des périodes τ. Quand on remplace τ par $\frac{a\tau + b}{c\tau + d}$, a, b, c, d étant quatre entiers tels que $ad - bc = 1$, J ne change pas; on en conclut que k^2 ou bien ne change pas, ou bien prend l'une des nouvelles valeurs

$$\frac{1}{k^2}, \quad 1 - k^2, \quad \frac{k^2 - 1}{k^2}, \quad \frac{k^2}{k^2 - 1}, \quad \frac{1}{1 - k^2}.$$

Pour que k^2 reste invariable il faut assujettir les entiers a, b, c, d à des conditions supplémentaires dans le détail desquelles nous ne pouvons pas entrer. Les substitutions spéciales du groupe modulaire qui n'altèrent pas k^2 forment ce que l'on appelle un *sous-groupe*.

Nous indiquerons, en terminant, quel est, pour la fonction H de Jacobi, l'effet du remplacement des deux périodes, qui ont servi à la construire, par deux périodes équivalentes.

239. **Formes en nombre infini des fonctions de Jacobi. Fonction** H(u). — Considérons la fonction

$$H(u, q) = 2\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi u}{2\omega} - 2\sqrt[4]{q^9}\sin\frac{3\pi u}{2\omega} + \ldots,$$

$$q = e^{\frac{i\pi\omega'}{\omega}} = e^{i\pi\tau},$$

et en même temps la fonction $H(u, Q)$ dont le développement se déduit du précédent en y remplaçant 2ω et $2\omega'$ par les périodes équivalentes $2\omega_1$ et $2\omega'_1$, Q étant ce que devient q par suite de cette substitution

$$H(u, Q) = 2\sqrt[4]{Q}\sin\frac{\pi u}{2\omega_1} - 2\sqrt[4]{Q^9}\sin\frac{3\pi u}{2\omega_1} + \dots.$$

Nous allons démontrer que les fonctions $H(u, Q)$ et $H(u, q)$ sont identiques, à un facteur exponentiel près de la forme $Ae^{\alpha u^2}$, α désignant une constante. Cela résulte de l'égalité

$$\sigma(u \mid \omega_1, \omega'_1) = \sigma(u \mid \omega, \omega');$$

car, si l'on y remplace chaque fonction σ par la fonction H correspondante (n° 21), on obtient cette autre égalité

$$\rho_1 e^{h_1 u^2} H(u, Q) = \rho e^{h u^2} H(u, q),$$

dans laquelle ρ, ρ_1, h et h_1 sont des constantes convenablement choisies. On en déduit immédiatement

$$H(u, Q) = A e^{\alpha u^2} H(u, q),$$

A et α désignant des constantes. Nous allons déterminer α.

Revenons aux notations habituelles des périodes pour les fonctions de Jacobi, en posant

$$\omega = K, \qquad \omega' = iK',$$
$$\omega_1 = L, \qquad \omega'_1 = iL',$$
$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}, \qquad Q = e^{-\pi\frac{L'}{L}},$$

avec

(9) $$\begin{cases} iL' = aiK' + bK, \\ L = ciK' + dK, \end{cases}$$

a, b, c, d étant des entiers tels que

(10) $$ad - bc = 1.$$

Ces quatre entiers ne peuvent pas être pairs tous les quatre ni impairs tous les quatre. Si b est pair, a et d sont impairs; si a est pair, b et c sont impairs.

Pour déterminer α remarquons que l'on a

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &H(u+2L, Q) = -H(u, Q),\\ &H(u+2dK+2ciK', q) = \varepsilon e^{-\frac{ci\pi}{K}(u+ciK')} H(u, q), \end{aligned}\right.$$

ε étant égal à $+1$ ou à -1 suivant la parité des entiers d et c. On a en effet

$$H(u+2dK, q) = (-1)^d H(u, q);$$

changeant, dans les deux membres, u en $u+2ciK'$ et se rappelant la formule (n° 77)

$$H(u+2ciK', q) = (-1)^c e^{-\frac{ci\pi}{K}(u+ciK')} H(u, q),$$

on a la seconde des formules (11) où

$$\varepsilon = (-1)^{d+c}.$$

La relation

$$H(u, Q) = A e^{\alpha u^2} H(u, q)$$

donne alors, en changeant u en $u+2L$ dans le premier membre et u en la quantité équivalente $u+2dK+2ciK'$ dans le second,

$$H(u+2L, Q) = A e^{\alpha(u+2L)^2} H(u+2dK+2ciK', q).$$

Divisant membre à membre ces deux dernières relations en tenant compte des équations (11) nous trouverons

$$(12)\qquad -1 = \varepsilon e^{\alpha(u+2L)^2 - \alpha u^2 - \frac{ci\pi}{K}(u+ciK')}.$$

Cette relation ayant lieu quel que soit u, les termes en u doivent disparaître dans l'exponentielle, d'où la valeur de α

$$\alpha = \frac{ci\pi}{4KL}.$$

Comme vérification, remplaçons α par sa valeur dans la formule (12) et réduisons en remplaçant L par $dK+ciK'$, nous obtenons

$$-1 = \varepsilon(-1)^{dc}$$

ou, d'après la valeur de ε,

$$(-1)^{(d+1)(c+1)} = 1,$$

relation évidente, car d et c ne peuvent être pairs tous deux.

On a donc, en définitive, l'égalité fondamentale

$$\text{(13)}\qquad \mathrm{H}(u, \mathrm{Q}) = \mathrm{A}e^{\frac{ci\pi u^2}{4\mathrm{KL}}}\,\mathrm{H}(u, q),$$

où A est une constante qu'il reste à déterminer. Nous ne nous occuperons pas ici de ce calcul.

On voit que, au point de vue où nous nous plaçons ici, la fonction H de Jacobi se comporte d'une façon moins simple que la fonction σ, puisque σ ne change pas quand on remplace les périodes par des périodes équivalentes, tandis que H se reproduit multipliée par une exponentielle.

Cette relation étant obtenue, on en déduit aisément des relations analogues entre les fonctions Θ, Θ_1, H_1 construites d'une part avec K et $i\mathrm{K}'$, d'autre part avec L et $i\mathrm{L}'$. Il suffit dans la formule (13) de remplacer, dans le premier membre, u par $u+\mathrm{L}$, ou $u+i\mathrm{L}'$, ou $u+\mathrm{L}+i\mathrm{L}'$, et dans le second membre, u par les valeurs égales $u+d\mathrm{K}+ci\mathrm{K}'$, ou $u+b\mathrm{K}+ai\mathrm{K}'$ ou $u+(b+d)\mathrm{K}+(a+c)i\mathrm{K}'$. Tenant alors compte des relations du n° 77, on aura les relations demandées. Ces relations prennent des formes différentes suivant les parités des nombres a, b, c, d. Elles permettent d'exprimer le module des nouvelles fonctions elliptiques en fonction de k.

Nous ne les écrirons pas, et nous renverrons le lecteur au Cours de M. Hermite à la Faculté des Sciences, où les calculs sont poussés jusqu'au bout dans une hypothèse particulière sur les quatre entiers.

NOTES.

NOTE I.

IMPOSSIBILITÉ DE L'EXISTENCE D'UNE FONCTION CONTINUE AVEC DEUX PÉRIODES DONT LE RAPPORT EST RÉEL.

Soit $F(u)$ une fonction d'une variable imaginaire avec deux périodes ω' et ω dont le rapport est réel

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{b}{a},$$

a et b étant réels. Si l'on fait

$$u = \frac{\omega}{a} z,$$

quand z augmente de a, u augmente de ω, et quand z augmente de b, u augmente de ω'. La fonction

$$f(z) = F\left(\frac{\omega}{a} z\right)$$

admet les deux *périodes réelles* a et b. Nous allons démontrer la proposition suivante :

Ou bien les périodes a et b se réduisent à *une;* ou bien la fonction $f(z)$ est *constante.*

En effet, la fonction admettant les deux périodes a et b admet également toutes les périodes

$$Ma + Nb,$$

où M et N désignent deux entiers quelconques positifs négatifs ou nuls.

Considérons un axe Ox et prenons sur cet axe un segment OA égal à a. Si l'on prend, sur cet axe, un point x d'abscisse x, on peut toujours choisir un entier m positif ou négatif de telle façon que le point

$$\xi = x + ma$$

soit à l'origine ou sur le segment OA : appelons ce point le *point homo-*

logue de x. Alors considérons les points d'abscisses

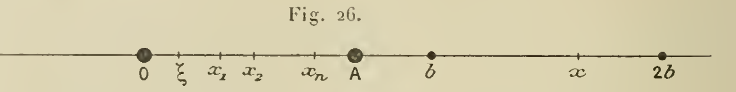
$$b,\quad 2b,\quad 3b,\quad \ldots,\quad nb$$

et leurs homologues

$$x_1 = b + m_1 a,\qquad x_2 = 2b + m_2 a,\qquad \ldots,\qquad x_n = nb + m_n a,$$

tous situés sur OA. Toutes les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et toutes leurs différences $x_\nu - x_\mu$ sont des périodes de $f(z)$, car elles sont toutes de la forme $Ma + Nb$, M et N étant entiers.

Fig. 26.



Si tous les points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont distincts, il en est au moins deux x_ν et x_μ dont la distance soit au plus égale à $\dfrac{a}{n-1}$

$$x_\nu - x_\mu \leqq \frac{a}{n-1},\qquad x_\nu > x_\mu;$$

en effet, si l'on divise le segment OA en $n-1$ parties égales, il existe nécessairement une de ces divisions qui contient au moins deux des points. La fonction admet alors la période

$$\omega_n = x_\nu - x_\mu,\qquad \omega_n \leqq \frac{a}{n-1},$$

et l'on a

$$f(z + \omega_n) = f(z).$$

Faisons croître maintenant n indéfiniment. Deux cas sont à distinguer :

1° Quelque grand que soit n les points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont distincts : alors la fonction admet une période ω_n *différente* de zéro mais aussi petite que l'on veut, car elle est au plus égale à $\dfrac{a}{n-1}$. La fonction est une *constante :* en effet, on a

$$\frac{f(z + \omega_n) - f(z)}{\omega_n} = 0,$$

quel que soit n. Quand n augmente indéfiniment, ω_n tend vers zéro; le rapport figurant dans le premier membre tend vers la dérivée $f'(z)$ et l'on trouve

$$f'(z) = 0,\qquad f(z) = \text{const.};$$

2° Il existe une valeur de n telle que deux des points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soient confondus

$$x_\nu - x_\mu = 0.$$

On a alors

$$\nu b + m_\nu a = \mu b + m_\mu a,$$

relation de la forme

$$(1) \qquad pa - qb = 0,$$

p et q étant deux entiers que l'on peut toujours supposer premiers entre eux, car on peut toujours, dans la relation (1), diviser les deux membres par les facteurs communs à p et q. Dans ce cas, les périodes a et b se réduisent à *une*. En effet, p et q étant premiers entre eux, il existe deux autres entiers p' et q' tels que

$$(2) \qquad pq' - qp' = 1.$$

Désignons alors par c la quantité

$$(3) \qquad p'a + q'b = c:$$

c est évidemment une période de $f(z)$; d'autre part, en résolvant les relations (1) et (3) par rapport à a et b, on a, d'après (2),

$$a = -qc, \qquad b = pc;$$

les périodes a et b sont donc des multiples d'une période unique c.

ADDITION A LA NOTE I.

IMPOSSIBILITÉ D'UNE FONCTION UNIFORME ET CONTINUE AVEC TROIS PÉRIODES.

Imaginons une fonction $f(z)$ d'une variable imaginaire z avec trois périodes α, β, γ dont les rapports sont imaginaires. Nous allons montrer ou que la fonction est *constante*, ou que les périodes se réduisent à *deux*.

Remarquons d'abord que la fonction admet comme périodes toutes les quantités

$$(1) \qquad \mathrm{M}\alpha + \mathrm{N}\beta + \mathrm{P}\gamma,$$

M, N, P étant des entiers positifs, négatifs ou nuls. Construisons ensuite, dans le plan représentatif des imaginaires, le parallélogramme des périodes α et β, OABC, ayant pour sommets les points

$$0, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \alpha + \beta.$$

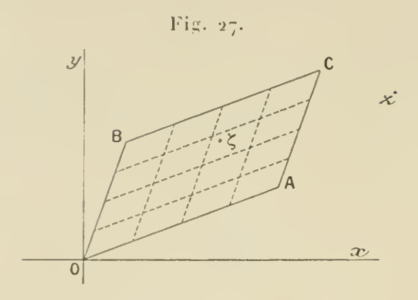
Un point quelconque z du plan a, dans ce parallélogramme, un homo-

logue ζ

$$\zeta = z + l\alpha + m\beta,$$

l et m étant des entiers, convenablement choisis.

Fig. 27.



Considérons alors les n^2 points

$$\gamma,\quad 2\gamma,\quad 3\gamma,\quad \ldots,\quad n^2\gamma,$$

où n est un entier et leurs homologues

$$\begin{aligned} z_1 &= \gamma + l_1\alpha + m_1\beta, \\ z_2 &= 2\gamma + l_2\alpha + m_2\beta, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_{n^2} &= n^2\gamma + l_{n^2}\alpha + m_{n^2}\beta. \end{aligned}$$

La fonction admet comme périodes toutes les quantités $z_1, z_2, \ldots, z_{n^2}$ et les différences de ces quantités deux à deux, car ces quantités et leurs différences sont de la forme (1).

Appelons λ la longueur de la plus grande diagonale du parallélogramme OABC. Si tous les points

$$(2)\qquad z_1,\quad z_2,\quad \ldots,\quad z_{n^2}$$

sont distincts, il en est au moins deux z_ν et z_μ dont la distance est moindre que $\frac{\lambda}{n-1}$. En effet, divisons les côtés OA et OB en $(n-1)$ parties égales et menons par les points de division des parallèles aux côtés du parallélogramme OABC : nous diviserons ce parallélogramme en $(n-1)^2$ cases égales entre elles ayant pour grande diagonale $\frac{\lambda}{n-1}$; sur les n^2 points (2), il en est forcément deux, au moins, z_ν et z_μ, dans une de ces cases. Leur distance est alors moindre que $\frac{\lambda}{n-1}$. Analytiquement le module de $z_\nu - z_\mu$ est moindre que $\frac{\lambda}{n-1}$. La fonction admet donc la période

$$\omega_n = z_\nu - z_\mu,$$

dont le module est moindre que $\frac{\lambda}{n-1}$

$$|\omega_n| < \frac{\lambda}{n-1}.$$

Deux cas sont à distinguer :

1° Quelque grand que soit n les points (2) sont toujours distincts. La fonction admet alors une période non nulle ω_n dont le module peut devenir aussi petit que l'on veut. Elle est constante, car

$$\frac{f(z+\omega_n)-f(z)}{\omega_n}=0$$

donne, pour n infini,

$$f'(z)=0.$$

2° Pour une certaine valeur de n, deux des points (2), z_ν et z_μ, coïncident. On a alors

$$\nu\gamma+l_\nu\alpha+m_\nu\beta=\mu\gamma+l_\mu\alpha+m_\mu\beta,$$

relation de la forme

$$(3)\qquad p\alpha+q\beta+r\gamma=0,$$

p, q, r étant trois entiers qu'on peut toujours rendre premiers entre eux en divisant (3) par les facteurs communs à p, q, r. Les périodes se réduisent alors à *deux*.

En effet, appelons s le plus grand commun diviseur de p et q : on peut déterminer deux entiers p' et q' tels que

$$(4)\qquad pq'-qp'=s.$$

Posons

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{p}{s}\alpha+\dfrac{q}{s}\beta=a,\\ p'\alpha+q'\beta=b; \end{cases}$$

a et b sont des périodes de la fonction, car $\frac{p}{s}$ et $\frac{q}{s}$ sont entiers. Les équations (5), résolues par rapport à α et β, donnent

$$(6)\qquad \begin{cases} \alpha=q'a-\dfrac{q}{s}b,\\ \beta=-p'a+\dfrac{p}{s}b, \end{cases}$$

et la relation (3) devient

$$(7)\qquad sa+r\gamma=0,$$

s et r étant des entiers premiers entre eux. On peut choisir deux entiers r' et s' tels que

$$rs' - sr' = 1$$

et en posant

$$s'a + r'\gamma = c, \tag{8}$$

c est une période. On tire de (7) et (8)

$$a = rc, \qquad \gamma = -sc,$$

d'où enfin, d'après (6),

$$\alpha = \quad q'rc - \frac{q}{s}b,$$

$$\beta = -p'rc + \frac{p}{s}b,$$

$$\gamma = -sc.$$

Les trois périodes se réduisent donc aux deux b et c. Cette démonstration est empruntée à Riemann (*Œuvres complètes*, p. 276).

NOTE II.

CONVERGENCE DU PRODUIT DOUBLEMENT INFINI QUI SERT A LA DÉFINITION DE σu.

Pour définir σu nous avons considéré le produit doublement infini

$$\prod{}'\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}, \qquad \begin{cases} w = 2m\omega + 2n\omega', \\ \left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \ldots, \pm \infty, \\ w = 0 \text{ exclus}, \end{cases}$$

et nous avons admis que ce produit est convergent. Pour le démontrer, nous établirons la convergence de la série obtenue en prenant les logarithmes des facteurs

$$\sum{}'\left[\operatorname{Log}\left(1-\frac{u}{w}\right)+\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}\right].$$

Si l'on choisit pour détermination du logarithme de $\left(1-\frac{u}{w}\right)$ celle qui tend vers zéro quand w devient infini, le terme général peut s'écrire, en développant le logarithme en série :

$$t_w = -\frac{u^3}{w^3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\frac{u}{w}+\frac{1}{5}\frac{u^2}{w^2}+\ldots\right)$$

et l'on voit que le rapport

$$t_w : -\frac{1}{3}\frac{u^3}{w^3}$$

tend vers 1 quand w devient infini. D'après cela il nous suffit de considérer la somme

$$\sum{}' -\frac{1}{3}\frac{u^3}{w^3} = -\frac{u^3}{3}\sum{}'\frac{1}{w^3},$$

ou encore de démontrer la proposition suivante :

La série

$$\sum{}'\frac{1}{(2m\omega+2n\omega')^3}, \qquad \begin{cases} \left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots, \\ (m = 0,\ n = 0 \text{ exclus}) \end{cases}$$

est une série convergente.

Nous reproduirons une démonstration de ce théorème due à Eisenstein, telle qu'elle est exposée par M. Hermite (*Cours de la Faculté des Sciences*, 3e édition, p. 213).

Soient x et y les coordonnées cartésiennes d'un point, envisageons l'ellipse donnée par l'équation

$$\text{mod}^2(2\omega x + 2\omega' y) = 1$$

où le premier membre est le carré du module de $2\omega x + 2\omega' y$, et désignons par A son grand axe. Pour toutes les valeurs de x et de y qui représentent un point de la courbe, on a donc

$$x^2 + y^2 < A^2$$

ou bien, comme en ce point $\text{mod}^2(2\omega x + 2\omega' y) = 1$,

$$x^2 + y^2 < A^2 \, \text{mod}^2(2\omega x + 2\omega' y).$$

Cette relation étant homogène par rapport aux variables x et y subsiste si l'on y remplace x et y par λx et λy, λ étant une quantité quelconque; elle a donc lieu quelles que soient les valeurs de x et de y. Nous la mettrons sous la forme

$$\frac{1}{\text{mod}(2\omega x + 2\omega' y)} < \frac{A}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Une limite supérieure du module de la somme considérée est donc $A \sum' \frac{1}{(m^2 + n^2)^{\frac{3}{2}}}$ et il suffit de démontrer la convergence de cette série qui est d'une forme plus simple.

A cet effet, partageons le plan en carrés par des parallèles aux axes Oy et Ox dont les abscisses et les ordonnées représentent tous les nombres entiers. Les sommets de ces carrés, l'origine étant mise à part, ont ainsi pour coordonnées tous les nombres entiers et correspondent aux divers termes de la série

$$\sum' \frac{1}{(m^2 + n^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Considérons d'abord la suite formée par la somme des termes correspondant aux sommets situés sur la bissectrice Oz de l'angle des coordonnées xOy; pour ces points on a $m = n$: la somme envisagée est donc égale, à un facteur numérique près, à la série simple

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots;$$

elle est par suite convergente.

Prenons maintenant la somme des termes pris sur Ox et dans l'angle xOz; il suffira évidemment d'établir sa convergence pour démontrer notre proposition.

Soit, pour abréger l'écriture,

$$\frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{3}{2}}} = (m, n)$$

et posons

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 0), \\ u_2 &= (2, 0) + (2, 1), \\ u_3 &= (3, 0) + (3, 1) + (3, 2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_m &= (m, 0) + (m, 1) + \ldots + (m, m-1), \end{aligned}$$

la série simple à laquelle nous sommes amenés, savoir

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_m + \ldots,$$

est manifestement convergente. En effet, chacun des m termes qui composent u_m est plus petit que le premier $(m, 0)$ qui est égal à $\frac{1}{m^3}$. On a donc

$$u_m < \frac{1}{m^2}.$$

Ainsi la série $\sum u_m$ a pour limite supérieure $\sum \frac{1}{m^2}$ dont la valeur est finie.

La série proposée est donc convergente et a une somme indépendante de l'ordre de ses termes; comme nous l'avons dit en commençant, on en déduit la convergence du produit doublement infini qui sert à définir σu.

NOTE III.

SUR LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS Θ EN FACTEURS.

Nous avons à la page 121, en identifiant l'expression de Θ_1 sous forme de produit avec l'expression de Θ_1 sous forme de série, obtenu l'identité

$$(1)\qquad \begin{cases} A(1+2q\cos 2x+q^2)(1+2q^3\cos 2x+q^6)\ldots \\ \qquad = 1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+\ldots. \end{cases}$$

Nous avons réservé à ce moment la détermination de la constante A. Voici la méthode que M. Biehler a donnée pour déterminer A, méthode que nous empruntons à une Note de M. Hermite placée à la fin de la dernière édition de l'*Analyse* de Serret.

Considérons le produit composé d'un nombre fini de facteurs,

$$\begin{aligned} f(z) = (1+qz)(1+q^3z)\ldots(1+q^{2n-1}z) \\ \times\left(1+\frac{q}{z}\right)\left(1+\frac{q^3}{z}\right)\cdots\left(1+\frac{q^{2n-1}}{z}\right); \end{aligned}$$

le développement suivant les puissances positives et négatives de z sera de la forme

$$f(z) = A_0 + A_1\left(z+\frac{1}{z}\right)+\ldots+A_n\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right).$$

Cela étant, l'identité suivante, qui se vérifie immédiatement,

$$f(q^2z)(q^{2n}+qz) = f(z)(1+q^{2n+1}z),$$

donne entre deux coefficients consécutifs, A_i et A_{i-1}, la relation

$$A_i(1-q^{2n+2i}) = A_{i-1}(q^{2i-1}-q^{2n+1}).$$

Nous en tirons successivement

$$A_1 = A_0\frac{q(1-q^{2n})}{1-q^{2n+2}},$$

$$A_2 = A_1\frac{q^3(1-q^{2n-2})}{1-q^{2n+4}},$$

$$A_3 = A_2\frac{q^5(1-q^{2n-4})}{1-q^{2n+6}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et, par conséquent,

$$A_i = A_0 \frac{q^{i^2}(1-q^{2n})(1-q^{2n-2})\ldots(1-q^{2n-2i+2})}{(1-q^{2n+2})(1-q^{2n+4})\ldots(1-q^{2n+2i})}.$$

Tous les coefficients du développement s'obtiennent donc au moyen du premier A_0, dont voici la détermination.

Supposons $i = n$ et remarquons que dans $f(z)$ le terme en z^n ayant pour coefficient $q^{1+3+\ldots+2n-1}$, on a immédiatement $A_n = q^{n^2}$, d'où, par conséquent,

$$q^{n^2} = A_0 \frac{q^{n^2}(1-q^{2n})(1-q^{2n-2})\ldots(1-q^2)}{(1-q^{2n+2})(1-q^{2n+4})\ldots(1-q^{4n})},$$

et enfin la valeur cherchée que j'écris ainsi

$$A_0 = \frac{(1-q^{2n+2})(1-q^{2n+4})\ldots(1-q^{4n})}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2n})}.$$

Cela étant, faisons croître indéfiniment le nombre n, cette expression nous donne

$$A_0 = \frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots},$$

et la relation entre A_i et A_0 devenant simplement $A_i = A_0 q^{i^2}$, on est conduit à l'égalité

$$(1+qz)(1+q^3z)(1+q^5z)\ldots\left(1+\frac{q}{z}\right)\left(1+\frac{q^3}{z}\right)\left(1+\frac{q^5}{z}\right)\ldots$$
$$= \frac{1+q\left(z+\frac{1}{z}\right)+q^4\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\ldots+q^{i^2}\left(z^i+\frac{1}{z^i}\right)+\ldots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots}.$$

Il suffit maintenant de poser $z = e^{2ix}$ pour en conclure

$$(1+2q\cos 2x+q^2)(1+2q^3\cos 2x+q^6)\ldots$$
$$= \frac{1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+\ldots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots}.$$

La valeur de la constante A qui figure dans la formule (1) est donc

$$A = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\ldots.$$

RÉSUMÉ DES PRINCIPALES FORMULES.

FONCTIONS DE M. WEIERSTRASS.

Développements en produits et séries infinis.

$$\sin u = u \prod{}' \left(1 - \frac{u}{m\pi}\right) e^{\frac{u}{m\pi}},$$

$$\cot u = \frac{1}{u} + \sum{}' \left(\frac{1}{u - m\pi} + \frac{1}{m\pi}\right),$$

$$\frac{1}{\sin^2 u} = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \frac{1}{(u - m\pi)^2}.$$

$$(w = 2m\omega + 2n\omega'),$$

$$\sigma u = u \prod{}' \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}},$$

$$\zeta u = \frac{1}{u} + \sum{}' \left(\frac{1}{u - w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right),$$

$$p u = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u - w)^2} - \frac{1}{w^2}\right],$$

$$-\frac{1}{2} p' u = \sum \frac{1}{(u - w)^3}.$$

Développements en séries entières.

$$\sigma u = u + \star - \frac{g_2 u^5}{2^4 . 3 . 5} - \frac{g_3 u^7}{2^3 . 3 . 5 . 7} - \frac{g_2^2 u^9}{2^9 . 3^2 . 5 . 7} - \ldots,$$

$$\zeta u = \frac{1}{u} + \star - \frac{g_2}{2^2 . 3 . 5} u^3 - \frac{g_3}{2^2 . 5 . 7} u^5 - \frac{g_2^2}{2^4 . 3 . 5^2 . 7} u^7 - \ldots,$$

$$p u = \frac{1}{u^2} + \star + \frac{g_2}{2^2 . 5} u^2 + \frac{g_3}{2^2 . 7} u^4 + \frac{g_2^2}{2^4 . 3 . 5^2} u^6 + \ldots.$$

$$g_2 = 60 \sum{}' \frac{1}{w^4}, \qquad g_3 = 140 \sum{}' \frac{1}{w^6}.$$

Relations entre $\wp u$ et ses dérivées.

$$\wp'^2 u = 4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3 = 4(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3),$$
$$\wp'' u = 6\wp^2 u - \tfrac{1}{2} g_2,$$
$$\wp''' u = 12 \wp u\, \wp' u.$$

Homogénéité.

$$\sigma(\mu u \mid \mu\omega, \mu\omega') = \mu\, \sigma(u \mid \omega, \omega'),$$
$$\zeta(\mu u \mid \mu\omega, \mu\omega') = \frac{1}{\mu}\, \zeta(u \mid \omega, \omega'),$$
$$\wp(\mu u \mid \mu\omega, \mu\omega') = \frac{1}{\mu^2}\, \wp(u \mid \omega, \omega'),$$
$$g_2(\mu\omega, \mu\omega') = \frac{1}{\mu^4}\, g_2(\omega, \omega'),$$
$$g_3(\mu\omega, \mu\omega') = \frac{1}{\mu^6}\, g_3(\omega, \omega').$$

Dégénérescence.

1° $\omega' = \infty$:

$$\wp u = -\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)},$$
$$\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 = \frac{9 g_3}{2 g_2}, \qquad e_1 = \frac{3 g_3}{g_2}, \qquad e_2 = e_3 = -\frac{3 g_3}{2 g_2}$$
$$g_2^3 - 27 g_3^2 = 0.$$
$$\zeta u = \frac{\pi}{2\omega} \operatorname{cotang} \frac{\pi u}{2\omega} + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 u.$$
$$\sigma u = e^{\frac{1}{6}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)^2} \frac{2\omega}{\pi} \sin \frac{\pi u}{2\omega}.$$

2° $\omega = \infty$, $\omega' = \infty$:

$$\wp u = \frac{1}{u^2}, \qquad \zeta u = \frac{1}{u}, \qquad \sigma u = u,$$
$$e_1 = e_2 = e_3 = 0, \qquad g_2 = 0, \qquad g_3 = 0.$$

Périodicité et formules d'addition.

$$\wp(u + 2\omega) = \wp u,$$
$$\wp(u + 2\omega') = \wp u,$$
$$\zeta(u + 2\omega) = \zeta u + 2\eta, \qquad \eta = \zeta\omega,$$
$$\zeta(u + 2\omega') = \zeta u + 2\eta', \qquad \eta' = \zeta\omega',$$

$$\sigma(u + 2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)}\,\sigma u,$$

$$\sigma(u + 2\omega') = -e^{2\eta'(u+\omega')}\,\sigma u,$$

$$\sigma(u + 2m\omega + 2n\omega') = (-1)^{mn+m+n}\, e^{(2m\eta+2n\eta')(u+m\omega+n\omega')}\,\sigma u;$$

$$\mathrm{p}u - \mathrm{p}v = -\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v},$$

$$\frac{\mathrm{p}'u}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}v} = \zeta(u+v) + \zeta(u-v) - 2\zeta u,$$

$$\frac{-\mathrm{p}'v}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}v} = \zeta(u+v) - \zeta(u-v) - 2\zeta v,$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{p}'u - \mathrm{p}'v}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}v} = \zeta(u+v) - \zeta u - \zeta v,$$

$$\mathrm{p}u - \mathrm{p}(u+v) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{p}'u - \mathrm{p}'v}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}v}\right),$$

$$\mathrm{p}u + \mathrm{p}v + \mathrm{p}(u+v) = \frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{p}'u - \mathrm{p}'v}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}v}\right)^2,$$

$$\mathrm{p}(u+\omega) - e_1 = \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\mathrm{p}u - e_1},$$

$$\mathrm{p}(u+\omega+\omega') - e_2 = \frac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}{\mathrm{p}u - e_2},$$

$$\mathrm{p}(u+\omega') - e_3 = \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{\mathrm{p}u - e_3}.$$

Racines e_1, e_2, e_3. — Fonctions σ_1, σ_2, σ_3.

$$e_1 = \mathrm{p}\omega, \qquad e_2 = \mathrm{p}(\omega + \omega'), \qquad e_3 = \mathrm{p}\omega'.$$

$$\mathrm{p}'u = -2\,\frac{\sigma(u-\omega)\,\sigma(u-\omega')\,\sigma(u-\omega-\omega')}{\sigma\omega\,\sigma\omega'\,\sigma(\omega+\omega')\,\sigma^3 u},$$

$$\sigma_1 u = e^{\eta u}\,\frac{\sigma(\omega - u)}{\sigma\omega},$$

$$\sigma_2 u = e^{(\eta+\eta')u}\,\frac{\sigma(\omega + \omega' - u)}{\sigma(\omega+\omega')},$$

$$\sigma_3 u = e^{\eta' u}\,\frac{\sigma(\omega' - u)}{\sigma\omega'};$$

$$\mathrm{p}u - e_1 = \left(\frac{\sigma_1 u}{\sigma u}\right)^2, \qquad \mathrm{p}u - e_2 = \left(\frac{\sigma_2 u}{\sigma u}\right)^2, \qquad \mathrm{p}u - e_3 = \left(\frac{\sigma_3 u}{\sigma u}\right)^2;$$

$$\mathrm{p}'u = -\frac{2\,\sigma_1 u\,\sigma_2 u\,\sigma_3 u}{\sigma^3 u}.$$

Les fonctions σ_1, σ_2, σ_3 sont paires.

Valeurs réelles de pu *quand* ω *et* $\frac{\omega'}{i}$ *sont réelles.*

Considérons le rectangle de sommets o, ω, $\omega+\omega'$, ω'. Quand l'argument u décrit le contour de ce rectangle dans le sens o, ω, $\omega+\omega'$, ω', o, la fonction pu diminue constamment de $+\infty$ à $-\infty$:

1° Quand u va de o au sommet ω, pu est réel et décroît de ∞ à e_1 : $p'u$ est négatif.

2° Quand u va de ω à $\omega+\omega'$, pu décroît de e_1 à e_2, $p'u$ est purement imaginaire positive.

3° La variable u allant de $\omega+\omega'$ à ω', pu décroît de e_2 à e_3, $p'u$ est réelle et positive.

4° Enfin u revenant de ω' à o, pu décroît de e_3 à $-\infty$; $p'u$ est purement imaginaire négative.

En tout point pris dans le rectangle, pu est imaginaire.

FONCTIONS DE JACOBI.

Séries trigonométriques.

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}, \qquad v = \frac{\pi u}{2K},$$

$$H(u) = 2\sqrt[4]{q}\sin v - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3v + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5v - \ldots,$$

$$H_1(u) = 2\sqrt[4]{q}\cos v + 2\sqrt[4]{q^9}\cos 3v + 2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5v + \ldots,$$

$$\Theta(u) = 1 - 2q\cos 2v + 2q^4\cos 4v - 2q^9\cos 6v + \ldots,$$

$$\Theta_1(u) = 1 + 2q\cos 2v + 2q^4\cos 4v + 2q^9\cos 6v + \ldots.$$

$\lambda = e^{-\frac{i\pi}{4K}(2u+iK')}$,	*Zéros de* $H(u)$	$2mK + 2niK'$,
$H_1(u) = H(u+K)$,	» $H_1(u)$	$(2m+1)K + 2niK'$.
$\Theta(u) = \frac{1}{i\lambda}H(u+iK')$,	» $\Theta(u)$	$2mK + (2n+1)iK'$.
$\Theta_1(u) = \frac{1}{\lambda}H(u+K+iK')$,	» $\Theta_1(u)$	$(2m+1)K + (2n+1)iK'$.

Produits infinis.

$$v = \frac{\pi u}{2K}, \qquad A = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots,$$

$$H(u) = A\,2\sqrt[4]{q}\sin v(1-2q^2\cos 2v+q^4)(1-2q^4\cos 2v+q^8)\ldots;$$

$$H_1(u) = A\,2\sqrt[4]{q}\cos v(1-2q^2\cos 2v+q^4)(1-2q^4\cos 2v+q^8)\ldots,$$

$$\Theta(u) = A(1-2q\cos 2v+q^2)(1-2q^3\cos 2v+q^6)\ldots,$$

$$\Theta_1(u) = A(1-2q\cos 2v+q^2)(1+2q^3\cos 2v+q^6)\ldots.$$

Addition d'une demi-période ou d'une période.

$$\lambda = e^{-\frac{i\pi}{4K}(2u+iK')}, \qquad \mu = e^{-\frac{i\pi}{K}(u+iK')},$$

$$H(u+K) = H_1(u), \qquad H(u+iK') = i\lambda\,\Theta(u),$$

$$\Theta(u+K) = \Theta_1(u), \qquad \Theta(u+iK') = i\lambda\,H(u),$$

$$H_1(u+K) = -H(u), \qquad H_1(u+iK') = \lambda\,\Theta_1(u),$$

$$\Theta_1(u+K) = \Theta(u), \qquad \Theta_1(u+iK') = \lambda\,H_1(u).$$

$$H(u+K+iK') = \lambda\,\Theta_1(u), \qquad H(u+2iK') = -\mu\,H(u),$$

$$\Theta(u+K+iK') = \lambda\,H_1(u), \qquad \Theta(u+2iK') = -\mu\,\Theta(u),$$

$$H_1(u+K+iK') = -i\lambda\,\Theta(u), \qquad H_1(u+2iK') = \mu\,H_1(u),$$

$$\Theta_1(u+K+iK') = i\lambda\,H(u), \qquad \Theta_1(u+2iK') = \mu\,\Theta_1(u).$$

Relations entre les σ et les $\Im$.

$$\sigma u = \frac{H(u)}{H'(0)}\,e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2},$$

$$\sigma_1(u) = \frac{\sigma(\omega+u)}{\sigma\omega}\,e^{-\eta u} = \frac{H_1(u)}{H_1(0)}\,e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2},$$

$$\sigma_2(u) = \frac{\sigma(\omega+\omega'+u)}{\sigma(\omega+\omega')}\,e^{-(\eta+\eta')u} = \frac{\Theta_1(u)}{\Theta_1(0)}\,e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2},$$

$$\sigma_3(u) = \frac{\sigma(\omega'+u)}{\sigma\omega'}\,e^{-\eta' u} = \frac{\Theta(u)}{\Theta(0)}\,e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}.$$

FONCTIONS $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$.

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\mathrm{H}(u)}{\Theta(u)},$$

$$\operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\mathrm{H}_1(u)}{\Theta(u)}, \qquad \sqrt{k} = \frac{\mathrm{H}(\mathrm{K})}{\Theta(\mathrm{K})} = \frac{\mathrm{H}_1(0)}{\Theta_1(0)},$$

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{k'} \frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)}, \qquad \sqrt{k'} = \frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)},$$

Addition d'une demi-période ou d'une période.

$$\operatorname{sn}(u+\mathrm{K}) = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}, \qquad \operatorname{sn}(u+i\mathrm{K}') = \frac{1}{k \operatorname{sn} u},$$

$$\operatorname{cn}(u+\mathrm{K}) = -\frac{k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}, \qquad \operatorname{cn}(u+i\mathrm{K}') = -i\frac{\operatorname{dn} u}{k \operatorname{sn} u},$$

$$\operatorname{dn}(u+\mathrm{K}) = \frac{k'}{\operatorname{dn} u}, \qquad \operatorname{dn}(u+i\mathrm{K}') = -i\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u},$$

$$\operatorname{sn}(u+\mathrm{K}+i\mathrm{K}') = \frac{\operatorname{dn} u}{k \operatorname{cn} u},$$

$$\operatorname{cn}(u+\mathrm{K}+i\mathrm{K}') = \frac{-ik'}{k \operatorname{cn} u},$$

$$\operatorname{dn}(u+\mathrm{K}+i\mathrm{K}') = ik'\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u},$$

$$\operatorname{sn}(u+2\mathrm{K}) = -\operatorname{sn} u, \qquad \operatorname{sn}(u+2i\mathrm{K}') = \operatorname{sn} u,$$

$$\operatorname{cn}(u+2\mathrm{K}) = -\operatorname{cn} u, \qquad \operatorname{cn}(u+2i\mathrm{K}') = -\operatorname{cn} u,$$

$$\operatorname{dn}(u+2\mathrm{K}) = \operatorname{dn} u, \qquad \operatorname{dn}(u+2i\mathrm{K}') = -\operatorname{dn} u.$$

Argument purement imaginaire. — Relation entre pu *et* $\operatorname{sn} u$.

$$\operatorname{sn}(iu \mid \mathrm{K}, i\mathrm{K}') = i\frac{\operatorname{sn}(u \mid \mathrm{K}', i\mathrm{K})}{\operatorname{cn}(u \mid \mathrm{K}', i\mathrm{K})},$$

$$\operatorname{cn}(iu \mid \mathrm{K}, i\mathrm{K}') = \frac{1}{\operatorname{cn}(u \mid \mathrm{K}', i\mathrm{K})}, \qquad pu = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2(u\sqrt{e_1 - e_3})}.$$

$$\operatorname{dn}(iu \mid \mathrm{K}, i\mathrm{K}') = \frac{\operatorname{dn}(u \mid \mathrm{K}', i\mathrm{K})}{\operatorname{cn}(u \mid \mathrm{K}', i\mathrm{K})}.$$

Valeurs réelles de sn u, cn u, dn u *quand* K *et* K′ *sont réels* (*fig.* 28).

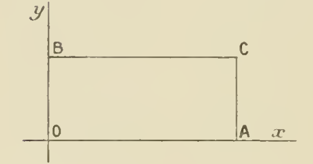
$$OA = K, \qquad OB = K',$$

u	O	A	C	B
$\operatorname{sn} u$	0	1	$\frac{1}{k}$	∞

u	A	O	B
$\operatorname{cn} u$	0	1	∞

u	C	A	O	B
$\operatorname{dn} u$	0	k'	1	∞

Fig. 28



Formules d'addition.

$$\operatorname{cn} \alpha = \operatorname{cn} u \operatorname{cn}(u - \alpha) + \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u - \alpha) \operatorname{dn} \alpha.$$

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1, \qquad k^2 + k'^2 = 1,$$
$$k^2 \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{dn}^2 u = 1,$$

$$\operatorname{sn}(u + v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},$$

$$\operatorname{cn}(u + v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},$$

$$\operatorname{dn}(u + v) = \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.$$

Dérivées.

$$\frac{d \operatorname{sn} u}{du} = g \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \qquad \sqrt{\frac{2Kg}{\pi}} = \Theta_1(0).$$

Si l'on suppose K et K′ liées par la condition

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots$$

on a

$$\frac{d(\operatorname{sn} u)}{du} = \quad \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,$$

$$\frac{d(\operatorname{cn} u)}{du} = - \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u,$$

$$\frac{d(\operatorname{dn} u)}{du} = - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u.$$

Développements en séries entières.

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right),$$

$$\operatorname{sn} u = u - 2k\alpha \frac{u^3}{1.2.3} + 4k^2(\alpha^2 + 3)\frac{u^5}{1.2.3.4.5}$$

$$- 8k^3(\alpha^3 + 33\alpha)\frac{u^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots,$$

$$\operatorname{cn} u = 1 - \frac{u^2}{1.2} + (1 + 4k^2)\frac{u^4}{1.2.3.4} - (1 + 44k^2 + 16k^4)\frac{u^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots,$$

$$\operatorname{dn} u = 1 - k^2\frac{u^2}{1.2} + k^2(4 + k^2)\frac{u^4}{1.2.3.4}$$

$$- k^2(16 + 44k^2 + k^4)\frac{u^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots.$$

FIN.

ERRATA.

Page 31, formule (31), *remplacer* z par u.

Page 367, formule du bas de la page et page 368, première formule, *mettre partout des signes* $+$.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I.

Notions préliminaires.

I. — Généralités sur les fonctions uniformes.

II. — Fractions rationnelles.

III. — Fonctions trigonométriques.

CHAPITRE II.

Généralités sur les fonctions elliptiques.

I. — Théorèmes généraux.

II. — Premières expressions des fonctions elliptiques. Décomposition en éléments simples. Conséquences.

CHAPITRE III.

Étude des valeurs réelles de $\wp u$, lorsque ω est réel et ω' purement imaginaire. Applications.

CHAPITRE IV.

Étude spéciale des notations de Jacobi.

II. — Fonctions sn$u$, cn$u$, dn$u$.

CHAPITRE V.

Étude des valeurs réelles de $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ quand K et K′ sont réels. Applications.

I. — K ET K′ RÉELS.

II. — BIQUADRATIQUE GAUCHE ; SURFACE DES ONDES.

III. — PENDULE SIMPLE. ÉLASTIQUE PLANE. CORDE A SAUTER. MOUVEMENT A LA POINSOT.

CHAPITRE VI.

Fonction $\wp$ à périodes imaginaires conjuguées. Discriminant négatif.

CHAPITRE VII.

Intégrales elliptiques. Réduction à la forme normale de Legendre et de Jacobi. Inversion.

I. — Intégrales elliptiques.

CHAPITRE VIII.

Réduction à la forme normale de M. Weierstrass. Inversion.

I. — Le polynome sous le radical est du troisième degré.

II. — LE POLYNOME SOUS LE RADICAL EST DU QUATRIÈME DEGRÉ. PREMIER MODE DE RÉDUCTION OÙ L'ON NE SE PRÉOCCUPE PAS DE LA RÉALITÉ.

III. — INVERSION EN QUANTITÉS RÉELLES. DISCRIMINANT POSITIF.

IV. — INVERSION EN QUANTITÉS RÉELLES. DISCRIMINANT NÉGATIF.

V. — MÉTHODE DE M. HERMITE.

CHAPITRE IX.

Applications diverses traitées avec la notation de M. Weierstrass.

I. — COURBE ÉLASTIQUE PLANE ET SANS PRESSION.

II. — PRISME DROIT CHARGÉ DEBOUT.

III. — Courbe élastique plane sous pression normale uniforme.

IV. — Surfaces homofocales. Coordonnées elliptiques.

V. — Application a la théorie de la chaleur.

CHAPITRE X.

Transformation de Landen.

CHAPITRE XI.

Fonctions à multiplicateurs constants, ou fonctions doublement périodiques de seconde espèce.

CHAPITRE XII.

Fonctions à multiplicateurs exponentiels, ou fonctions doublement périodiques de troisième espèce.

II. — Décomposition en éléments simples.

CHAPITRE XIII.

Périodes équivalentes. Notions sur les fonctions modulaires.

I. — Généralités.

II. — Notations de M. Weierstrass.

III. — Fonction modulaire. Groupe modulaire.

IV. — NOTATIONS DE JACOBI.

NOTES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

23089 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.